Índice general

Resumen

En este trabajo construimos el universo de Gödel L mediante funciones primitivo recursivas y estudiamos algunas de sus propiedades, como la consistencia de $V = L$ con ZFE, igualmente con HGC. Demostramos el Lema de Estabilidad para funciones primitivo recursivas, el cual nos permite probar el lema de Condensación en la jerarquía $(L_\alpha : \alpha \in On)$. Además, el universo de Gödel permite construir una semimorass la cual es un sistema sofisticado de índices que implica el conocido principio combinatorio $\diamondsuit$.

Capítulo 1

Introducción

No es una exageración sugerir que después de que Gödel introdujo su modelo L, la mayor parte del estudio de este modelo se debe a una sola persona, Ronald B. Jensen. Los resultados de Jensen en los años 60 y 70 del siglo XX muestran que la mayoría de los problemas que son independientes de ZFE, se resuelven suponiendo $V = L$. Estos incluyen el problema de Souslin, la hipótesis de Kurepa, relaciones de partición, el problema de los dos cardinales, etcétera.

No se afirma que cualquier problema en teoría de conjuntos tiene solución en $V = L$, sino que en cierto sentido informal, todo problema natural en teoría de conjuntos se puede decidir con la hipótesis adicional de que todo conjunto es construible.

El universo construible de Gödel L ha servido no solo para demostrar la consistencia del axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo (HGC) con la teoría de conjuntos usual ZF, sino como una fuente inagotable de principios combinatorios: el diamante $\diamondsuit_\kappa$, cuadro $\square_\kappa$, diversos principios de predicción, etc. Jensen construyó otros principios combinatorios más complejos conocidos como morasses, especificamente (κ, γ)-morasses, que a grandes rasgos se pueden describir como un sistema sofisticado de índices y límites directos.

Para demostrar la existencia de tales estructuras en L, debemos apelar a la teoría de estructura fina de L (veáse [Jen72]). En sí mismas, las morasses representan un reto al tratar de emplearlas para resolver un problema concreto; más si uno pretende interiorizarse en su construcción.

Existen estructuras más sencillas conocidas como semimorasses que nos permiten demostrar hechos no triviales; incluso algunos de los principios antes mencionados y cuya construcción no requiere la sostificada teoría de estructura fina.

En esta tesis presentamos una construcción de una semimorass en L y damos como aplicación de la misma, la validez de $\diamondsuit^\sharp$ en L, principio que generaliza al $\diamondsuit$.

Para lograr esto primero construimos formalmente L mediante funciones de conjunto primitivo recursivas (p.r.). En particular, demostraremos el poderoso lema de estabilidad que permite caracterizar a las funciones p.r. como Σ_1-funciones y con el cual podemos dar una demostración completa del lema de condensación en L. Vale la pena mencionar que tal demostración, en L, se haya ausente en la literatura, pues hasta ahora las existentes estaban incompletas: la de [Dev73] utiliza que las funciones primitivo recursivas son Σ_1 hecho que no demuestra, mientras que [Dev84] utiliza una teoría incorrecta (véase [St87] para una descripción de este problema).

En seguida construimos con todo detalle la semimorass en L sin recurrir a la teoría de estructura fina, sólo al lema de condesación.

Definimos diversas equivalencias o consecuencias de las variaciones del diamante $\diamondsuit$ hasta probar la existencia de $\diamondsuit^\sharp$ en L auxiliados de una semimorass.

En el capítulo I se dan una serie de definiciones y conceptos que más adelante usaremos. En el capítulo II construimos a L de una manera intuitiva, lo que nos permite demostrar que en L se cumple el axioma de elección; sin embargo esta construcción no suficiente para demostrar el lema de condensación, y en consecuencia la prueba de la HGC no está completa. En el capítulo III construimos L de una manera muy formal, aunque poco intuitiva, mediante funciones primitivo recursivas; esto permite demostrar el lema de estabilidad que tiene como consecuencia el lema de condesación completando la prueba de la HGC. Por último, en el capítulo IV construimos una semimorass en L, y demostramos que la semimorass implica el principio $\diamondsuit$. Es importante notar que para construir una sucesión $\diamondsuit^\sharp$ en la semimorass, no sólo se utilizan condiciones propias de la semimorass sino que se emplea en forma decidida la construcción de la semimorass. Esto nos dice que a veces es importante tener en cuenta la construcción de la semimorass, y no sólo sus propiedades.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se darán definiciones, lemas y teoremas que serán usados a lo largo de este trabajo.

2.1. Estructuras

Una estructura consiste en un universo M, dentro del cuál se interpretan relaciones y funciones; para su definición formal es necesario primero introducir la noción de lenguaje de primer orden.

Definición 1. Un lenguaje de primer orden consiste en:

i) Símbolos lógicos:

- Los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, llamados ”y”, ”o”, ”no”, ”implica”, y ”si y sólo si” respectivamente.
- Los cuantificadores $\forall$, $\exists$, llamados ”para todo” y ”existe” respectivamente.
- y una colección infinita de variables indexada por los números naturales, $v_0, v_1 \ldots$
- Los paréntesis),(.
- El símbolo $=$.

ii) Un conjunto $\mathcal{L}$ conformado por tres conjuntos ajenos $L_{\text{función}}$, $L_{\text{relación}}$ y $L_{\text{constante}}$, que constan de símbolos de funciones, relaciones y constantes respectivamente, y

iii) Una función valencia: $\mathcal{L} \rightarrow \omega$.

Definición 2. Un término es definido como sigue:

i) Una variable es un término

ii) Una constante es un término

iii) Si f es un símbolo de m-función y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.

iv) t es un término si y sólo si se obtiene de la aplicación finita de 1,2 y 3.

Definición 3. Una fórmula se define como sigue:

i) Si t_1 y t_2 son términos, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula.

ii) Si R es un símbolo de relación y $t_1, \ldots, t_2$ son términos, entonces $R(t_1, \ldots, t_2)$ es una fórmula.

iii) Si ϕ es una fórmula, entonces $\neg\phi$ es una fórmula.

iv) Si ϕ_1 y ϕ_2 son fórmulas, también lo son $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi_1 \vee \phi_2$, $\phi_1 \to \phi_2$, $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$.

v) Si v_i es una variable y ϕ es una fórmula entonces $(\exists v_i)\phi$ y $(\forall v_i)\phi$ son fórmulas.

vi) ϕ es una fórmula si y sólo si se obtiene de la aplicación finita de (i), (ii), (iii), (iv) y (v).

Definición 4. Una subfórmula de una fórmula ϕ se define como sigue:

i) ϕ es subfórmula de ϕ

ii) Si $(\neg\psi)$ es una subfórmula de ϕ, también lo es ψ

iii) Si cualquiera de $(\psi_1 \wedge \psi_2)$, $(\psi_1 \vee \psi_2)$, $(\psi_1 \to \psi_2)$, $(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$, son subfórmulas de ϕ entonces también lo son ψ_1 y ψ_2.

iv) Si $(\exists v_i)\psi$ o $(\forall v_i)\psi$ es una subfórmula de ϕ para algún número natural i, entonces lo es también ψ.

v) ψ es una subfórmula de ϕ si y sólo si se obtiene de la aplicación finita de (i), (ii), (iii) y (iv).

Definición 5. Una variable v_i es llamada acotada en una fórmula ϕ si y sólo si para alguna subfórmula ψ de ϕ se tiene que $(\exists v_i)\psi$ o $(\forall v_i)\psi$ es una subfórmula de ϕ. En este caso cada ocurrencia de v_i en ϕ es llamada ocurrencia acotada de v_i. Cuando v_i no es acotada en ϕ decimos que es libre.

Definición 6. Una estructura $\mathcal{M}$ de primer orden con un lenguaje $\mathcal{L}$ consiste en un par:

i) Un conjunto M, llamado el dominio; y

ii) Una función, llamada la interpretación de $\mathcal{L}$ que asigna:

- **a)** A cada símbolo de relación en $\mathcal{L}$ una relación $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ donde $n = \text{valencia}(R)$ la cuál es llamada la interpretación de R en $\mathcal{M}$;

b) Para cada símbolo de función $f \in \mathcal{L}$ una relación $f^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ donde $n =$ valencia(f) la cuál es llamada la interpretación de f en $\mathcal{M}$;

c) Para cada símbolo de constante $c \in \mathcal{L}$ una relación $c^{\mathcal{M}} \in M$ donde la cuál es llamada la interpretación de c en $\mathcal{M}$; y

escribimos $\mathcal{M} = \langle M, F, R, C \rangle$ donde M, F, R, C son el conjunto dominio, el de funciones, el de relaciones, y por último el de constantes respectivamente. Una subestructura $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ es un subconjunto de M, tal que el mismo es una estructura.

Si $\mathcal{M} = \langle M, F, R, C \rangle$ es una estuctura del lenguaje $\mathcal{L}$, dado un subconjunto A de M siempre se puede formar la estuctura generada por A, esta es la más pequeña subestructura que contiene a A.

Definición 7. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos estructuras con el mismo lenguaje $\mathcal{L}$. Sea $F : M \to N$ una función inyectiva decimos que F es un encaje de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ si:

i) $f^{\mathcal{N}}(F(\vec{a})) = F(f^{\mathcal{M}}(\vec{a}))$ para toda función $f \in \mathcal{L}$ y para toda $\vec{a}$ compuesta por elementos de M;

ii) $F(\vec{a}) \in R^{\mathcal{N}} \leftrightarrow \vec{a} \in R^{\mathcal{M}}$ para toda relación $R \in \mathcal{L}$ y para toda n-ada $\vec{a}$ de elementos de M

Si además se tiene $\mathcal{M} \models \phi(\vec{a}) \leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(F(\vec{a}))$ para toda fórmula ϕ, decimos que F es un encaje elemental y escribimos $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$. Si F es sobre, se dice que $\mathcal{M}$, y $\mathcal{N}$ son isomorfas.

Decimos que $\mathcal{M}$ es encaje elemental de $\mathcal{N}$, y escribimos $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$, si $M \subseteq N$ y f es la identidad.

Definición 8. Un conjunto de enunciados T es consistente si existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models$ T, esto es, $\mathcal{M} \models \varphi$ para todo $\varphi \in$ T. El conjunto de enunciados T es llamado una teoría.

Para probar que $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ se requiere verificar que cualquier fórmula ϕ es verdadera en $\mathcal{M}$ si y sólo si es verdadero en $\mathcal{N}$. En algunos casos esto puede ser probado por inducción sobre la complejidad de ϕ, sin embargo la inducción requiere la verificación de varios casos; el criterio de Tarski-Vaught dice que solamente uno de esos es necesario.

Teorema 9 (El criterio Tarski-Vaught)**.** *Sea $\mathcal{M}$ una subsestructura de $\mathcal{N}$. Los siguientes son equivalentes:*

a) $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$*; y*

b) *Para toda $\mathcal{M}$-fórmula $\phi(x)$ tal que $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x)$, existe $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \phi(a)$.*

Demostración. veáse [Dev73] □

Dado $A \subseteq N$ se construirá un modelo $\mathcal{M}$ tal que $A \subseteq M \subseteq N$. Queremos asegurar $\mathcal{M} \models \phi$ para todo enunciado ϕ de $\mathcal{N}$ con parámetros en M. Esto parece excluir la posibilidad de una construcción directa por la razón de que no se puede evaluar la verdad de $\mathcal{M}$ cuando $\mathcal{M}$ no se ha construido aún. Afortunadamente, el Teorema de Löwenhein-Skolem remplaza esto con un simple requerimiento: toda fórmula en $\mathcal{M}$ consistente en $\mathcal{N}$ es satisfecha por algunos elementos de $\mathcal{M}$. Esto no hace alusión a la verdad de $\mathcal{M}$, sólo a la verdad en $\mathcal{N}$.

Teorema 10 (Löwenhein-Skolem)**.** *Sean $\mathcal{N}$ una estructura infinita y $A \subseteq N$. Entonces existe $\mathcal{M}$ tal que $|M| = \max\{A, \aleph_0\}$ y $A \subseteq \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.*

Demostración. Veáse [Dev73] □

2.2. Absolutez

Definición 11. Las fórmulas Σ_0-fórmulas de LTC son definidas como sigue:

1. $x \in y, x = y, \neg(x = y), \neg(x \in y)$ son Σ_0-fórmulas para cualesquiera variables x y y.

2. Si φ, ϕ son Σ_0-fórmulas, también lo son $\varphi \wedge \phi$, $\varphi \vee \phi$, $\forall x \in y\phi$ y $\exists x \in y\phi$ (donde x, y son variables distintas.

3. Ninguna otra es una Σ_0-fórmula.

Lema 12. *Si ϕ es una Σ_0-fórmula, entonces $\neg\phi$ es lógicamente equivalente a una Σ_0-fórmula.*

Demostración. Por inducción sobre ϕ.

Caso 1. ϕ es cualquiera de estas cuatro fórmulas: $\phi(x,y) \equiv x \in y, \phi(x,y) \equiv x = y, \phi(x,y) \equiv \neg(x \in y), \phi(x,y) \equiv \neg(x = y)$.

Supongamos que $\phi(x,y) = x \in y$ entonces $\neg\phi(x,y) = \neg(x \in y)$ es Σ_0 por definición.

Si $\phi(x,y) = \neg(x \in y)$ entonces $\neg\phi(x,y) = \neg\neg(x \in y) \equiv x \in y$ la cuál es Σ_0 por definición.

Análogamente para $x = y$ y $\neg(x = y)$.

Caso 2. Supongamos que $\phi \equiv \varphi \wedge \psi$, $\phi \equiv \varphi \vee \psi$, $\phi \equiv \forall x \in y\psi \equiv \exists x \in u\psi$ son fórmulas Σ_0; veamos que sus negaciones son equivalentes a una fórmula Σ_0:

- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ donde $\neg\varphi, \neg\psi$ son Σ_0 por hipótesis de inducción.

- $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ donde nuevamente $\neg\varphi, \neg\psi$ son Σ_0 por hipótesis de inducción.

- $\neg(\forall x \in y\psi) \equiv \exists x \in y\neg\psi$, y por hipótesis de inducción $\neg\psi$ es Σ_0 por hipótesis de inducción.

- $\neg(\exists x \in y\psi) \equiv \forall x \in y \neg\psi$, y por hipótesis de inducción $\neg\psi$ es Σ_0 por hipótesis de inducción.

Lo que concluye la demostración.

□

Lema 13. *Si $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una Σ_0 fórmula y U_1 y U_2 son clases transitivas tales que $U_1 \subseteq U_2$ entonces para todo $a_1, \ldots, a_n \in U_1$*

$$\langle U_1, \in \rangle \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow \langle U_2, \in \rangle \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$$

Decimos que ϕ es absoluta entre U_1 y U_2.

Demostración. La demostración es por inducción en la construcción en la fórmula.

Caso 1. $\phi(x, y) \equiv x \in y$ o $\phi \equiv x = y$. Supongamos que $\phi(x, y) \equiv x = y$, Sean $a_1, a_2 \in U_1$ tal que $\langle U_1, \in \rangle \models a_1 = a_2$ y supongamos que $\langle U_2, \in \rangle \not\models a_1 = a_2$, entonces: $\langle U_2, \in \rangle \models \neg(a_1 = a_2)$ es decir $\langle U_2, \in \rangle \models \exists z[(z \in a_1) \wedge z \notin a_2)]$ pero como U_1 es transitivo se tiene $z \in U_1$, por lo tanto,$\langle U_1, \in \rangle \models \exists z(z \in a_1 \wedge z \notin a_2)$ es decir $\langle U_1, \in \rangle \models \neg(a_1 = a_2)$ una contradicción, por lo tanto $\langle U_2, \in \rangle \models a_1 = a_2$.

Ahora supongamos que $\langle U_2, \in \rangle \models a_1 = a_2$ y $\langle U_1, \in \rangle \not\models a_1 = a_2$. Repitiendo el argumento anterior intercambiando los papeles de U_1 y U_2 se llega a una contradicción. Con lo que concluimos:

$$\langle U_1, \in \rangle \models a_1 = a_2 \leftrightarrow \langle U_2, \in \rangle \models \neg(a_1 = a_2)$$

Análogamente para la pertenencia.

Caso 2. Supongamos que se cumple para φ, ψ. Supongamos $\langle U_1, \in \rangle \models \varphi \wedge \psi$ por lo tanto $\langle U_1, \in \rangle \models \varphi$ y$\langle U_1, \in \rangle \models \psi$ por hipótesis de inducción $\langle U_2, \in \rangle \models \varphi$ y $\langle U_2, \in \rangle \models \psi$ por lo que $\langle U_2, \in \rangle \models \varphi \wedge \psi$. El mismo argumento para la otra implicación.

Caso 3. Supongamos cierta la afirmación para ψ y $\langle U_2, \in \rangle \models \forall x \in b\ \psi$, entonces para todo $x \in b$ y $b \in U_1$ se cumple $\langle U_2, \in \rangle \models \psi$, por hipótesis de inducción tenemos $\langle U_2, \in \rangle \models \psi$ para $x \in b$. Como $b \in U_1$ y U_1 es transitivo $\langle U_1, \in \rangle \models \forall x \in b\psi$. Para la otra implicación si $\langle U_1, \in \rangle \models \forall x \in b\psi$, sabiendo que $U_1 \subseteq U_2$, por lo tanto $b \in U_2$, pero como U_2 es transitivo entonces si $x \in b$, entonces $x \in U_2$, tenemos que $\langle U_2, \in \rangle \models \forall x \in b\psi$. Análogamente para $\phi \equiv \exists x\psi$.

□

Definición 14. Las Σ_1-fórmulas de LTC son definidas como sigue:

1. $x \in y$, $x = y$, $\neg(x \in y)$, $\neg(x = y)$ son Σ_1-fórmulas para cualesquiera variables x y y.

2. Si φ, ψ son Σ_1-fórmulas, también lo son $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\forall x \in y\psi$, $\exists x \in y\psi$ y $\exists x\psi$ (donde x, y son variables distintas).

3. Ninguna otra es Σ_1-fórmula.

Análogamente definimos las Π_1-fórmulas:

1. $x \in y$, $x = y$, $\neg(x \in y)$, $\neg(x = y)$ son Π_1-fórmulas para cualesquiera variables x y y.

2. Si φ, ψ son Π_1-fórmulas, también lo son $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\forall x \in y\psi$, $\exists x \in y\psi$ y $\forall x\psi$ (donde x, y son variables distintas).

3. Ninguna otra es Π_1-fórmula.

Lema 15. *Si $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una Σ_1-fórmula y U_1 y U_2 son clases transitivas con $U_1 \subseteq U_2$, entonces para toda $a_1, \ldots, a_n \in U_1$ ocurre:*

$$\langle U_1, \in \rangle \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \rightarrow \langle U_2, \in \rangle \models \phi(a_1, \ldots, a_n).$$

(es decir ϕ se preserva hacia arriba o es absoluta hacia arriba entre U_1 y U_2.)

Demostración. La demostración es por inducción en la construcción de la fórmula.

Las fórmulas $\phi(x,y) \equiv x = y$, $\phi(x,y) \equiv \neg(x = y)$, $\phi \equiv x \in y$, $\phi \equiv \neg(x \in y)$,$\phi \equiv \varphi \wedge \psi$,$\phi \equiv \forall x \in y\psi$,$\phi \equiv \exists x \in y\psi$ han sido probadas en el lema anterior.

Ahora consideremos el caso $\phi \equiv \exists x\psi$, supongamos la afirmación cierta para ψ y que $\langle U_1, \in \rangle \models \exists x\psi(x)$, existe $a \in U_1$ tal que $\langle U_1, \in \rangle \models \psi(a)$ debido a que $a \in U_2$ pues $U_1 \subseteq U_2$ y por hipótesis de inducción $\langle U_2, \in \rangle \models \phi(a)$, es decir existe a tal que $\langle U_2, \in \rangle \models \psi(x)$, lo que quiere decir que $\langle U_2, \in \rangle \models \exists x\psi(x)$, que es lo que queríamos probar.

□

Llamaremos a las colecciones de la forma $\{x|\phi(x)\}$, donde ϕ es una fórmula de LTC, término clase. Observemos que todo conjunto es un término clase pues $a = \{x : x \in a\}$ en este caso $\phi(x) \equiv x \in a$. Debemos tener cuidado en su uso, pues no podemos cuantificar sobre ellos, pero si podemos trasladar algunas operaciones de conjuntos a los términos clases, por ejemplo, si $U_1 = \{x|\phi(x)\}$ y $U_2 = \{x|\psi(x)\}$, entonces:

$$U_1 \cap U_2 = \{x|\phi(x) \wedge \psi(x)\}$$

$$U_1 \cup U_2 = \{x|\phi(x) \vee \psi(x)\}$$

$$U_1 \times U_2 = \{x|\exists y(y = \langle s, t \rangle \wedge \phi(s) \wedge \psi(t)\}$$

y así susesivamente. $x \in U_1$ significa $\phi(x)$ y $U_1 \subseteq U_2$ significa $\forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x))$.

Si F, U_1, U_2 son clases con la propiedad $F \subseteq U_1 \times U_2$ y $\forall x \in U_1 \exists! y \in U_2 \langle x, y \rangle \in F$, entonces F también es un término clase, y escribimos $F(x) = y$ para abreviar $\langle x, y \rangle \in F$. También escribimos $F : U_1 \rightarrow U_2$, aunque F no sea una función, pues U_1 no es un conjunto.

V es un término clase pues, $V = \{x|x = x\}$.

Definición 16. 1. Una fórmula $\phi(x)$ es llamada Σ_0^{ZF} (respectivamente Σ_1^{ZF} si existe una Σ_0 (o Σ_1-fórmula) $\varphi(x)$ tal que ZF$\vdash \forall x(\phi(x) \leftrightarrow \varphi(x))$.

2. Una fórmula ϕ es llamada Δ_1^{ZF} si ϕ y $\neg\phi \in \Sigma_1^{ZF}$.

3. Suponga $n \in \omega$ y $F : V^n \longrightarrow V$ es un término clase. Entonces F es llamado Δ_1^{ZF} si la fórmula definida por $F(x_1 \ldots, x_n) = x_{n+1}$ es Δ_1^{ZF}.

Observemos que Σ_0^{ZF}-fórmula es Δ_1^{ZF} por lema 12.

Observemos que sólo necesitamos vericar que ϕ es Σ_1^{ZF} en la parte (3) de la anterior definición es Σ_1^{ZF} ya que $\neg\phi$ támbien es Σ_1^{ZF}:

$$ZF \vdash \forall x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}(\neg\phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \leftrightarrow \exists y(\phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \wedge \neg y = x_{n+1}))$$

Teorema 17. *Suponga $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es Δ_1^{ZF}, $U_1 \subseteq U_2$ son clases transitivas y $\langle U_i, \in\rangle \models$ZF (i=1,2). Entonces para todo $a_1, \ldots, a_n \in U_1$ se tiene*

$$\langle U_1, \in\rangle \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow \langle U_2, \in\rangle \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$$

(es decir ϕ es ZF-absoluta).

Demostración. Supongamos $\langle U_1, \in\rangle \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una Σ_1-fórmula tal que ZF$\vdash \forall x(\phi(x) \leftrightarrow \varphi(x))$, entonces $\langle U_1, \in\rangle \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \rightarrow \langle U_1, \in\rangle \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ ya que $\langle U_1, \in\rangle \models$ZF, $\langle U_2, \in\rangle \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ por el lema 15, por lo que $\langle U_2, \in\rangle \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$ ya que $\langle U_2, \in\rangle \models$ZF.

Para la otra implicación suponemos $\langle U_2, \in\rangle \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$. Sea $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ una Σ_1-fórmula tal que ZF$\vdash \forall x(\phi(x) \leftrightarrow \chi(x))$, y supongamos que $\langle U_1 \in\rangle \not\models \phi(a_1, ..., a_n)$. Como $\langle U_1\rangle \models ZF$, entonces:

$$\langle U_1, \in\rangle \models \neg\phi(a_1, \ldots, a_n)$$

$$\langle U_1, \in\rangle \models \neg\chi(a_1, \ldots, a_n)$$

Pues $\langle U_1 \in\rangle$ es modelo de ZF, y como χ es Δ_1^{ZF}, en particular es Σ_1^{ZF} y su negación también es Σ_1^{ZF}, aplicando el lema 15 tenemos que:

$$\langle U_1, \in\rangle \models \neg\chi(a_1, \ldots, a_n)$$

Como $\langle U_2, \in\rangle$ también es modelo de ZF, se tiene:

$$\langle U_1, \in\rangle \models \neg\phi(a_1, \ldots, a_n)$$

Lo cuál es una contradicción.

□

Teorema 18. *Las siguiente fórmulas y clases término son Σ_0^{ZF} (es decir Δ_0^{ZF}).*

1. *$x = y$; por definicón*

2. *$x \in y$; por definición*

3. *$x \subseteq y$;*

$$\forall z \in x(z \in y)$$

4. *$F(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (para cada n);*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z \leftrightarrow (\forall x \in z(x = x_1, \vee x = x_2, \ldots, \vee x = x_n)$$
$$\wedge (x_1 \in z \wedge \ldots \wedge x_n \in z))$$

5. *$F(x, y) = x \cup y$;*

$$F(x,y) = z \leftrightarrow (\forall w \in z(w \in x \vee w \in y) \wedge (\forall w \in x(w \in w) \wedge \forall w \in y(w \in w)))$$

6. *$F(x, y) = x \cap y$;*

$$F(x,y) = z \leftrightarrow (\forall w \in z(w \in x \wedge w \in y) \wedge (\forall w \in x(w \in y \rightarrow w \in z)))$$

7. *$F(x) = \cup x$;*

$$F(x) = z \leftrightarrow (\forall w \in z \exists y \in x(w \in y) \wedge \forall a \in y(y \in x \rightarrow a \in x))$$

8. *$F(x) = \cap x$ si $x \neq \emptyset$, $F(x) = \emptyset$ en otro caso.*

$$F(x) = z \leftrightarrow ((x \neq \emptyset \rightarrow (\forall w \in z \forall y \in x(w \in y))) \wedge \forall y \in x(w \in y \rightarrow w \in z)$$
$$\vee (x = \emptyset \rightarrow z = \emptyset)$$

9. *$F(x, y) = x \backslash y$;*

$$F(x,y) = z \leftrightarrow (\forall w \in z(w \in x \wedge w \notin y) \wedge w \in x(w \notin y \rightarrow w \in z))$$

10. *x es una n-ada. Primero veámos el caso para una 2-ada:*

$$\langle y, z \rangle = x \leftrightarrow (\forall w \in x(w = \{y\} \vee w = \{y, z\}) \wedge (\{y\} \in z \wedge \{y, z\} \in x))$$

Supongamos que hemos mostrado que la n-tupla es Σ_0, veamos que la $n+1$-tupla es Σ_0

$$\langle x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \rangle = \langle \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, x_{n+1} \rangle$$

11. *x es una n-relación sobre y*

$$w \in x \leftrightarrow \exists a \in y \exists b \in y(\langle a, b \rangle = x)$$

12. *x es una función sobre y.*

$$x \text{ es una relación} \wedge \forall a \in y \exists b \in \bigcup(\bigcup x)(\langle a, b \rangle) \in x \wedge$$
$$\forall \in y \forall b \in \bigcup(\bigcup x) \forall c \in \bigcup(\bigcup x)((\langle a, b \rangle \in x \wedge \langle a, b \rangle \in x) \rightarrow b = c)$$

13. $F(x) =$dom x si x es una función, $\emptyset$ en otro caso.

$$F(x) = z \leftrightarrow (((x \text{ es función } \rightarrow (\forall w \in z \exists b \in \bigcup(\bigcup x)(\langle w, b\rangle \in x) \wedge$$
$$(\forall y \in x(y = \langle w, b\rangle) \rightarrow w \in z)) \vee (x \text{ no es función } \rightarrow z = \emptyset))$$

14. $F(x) =$ran x si x es una función, $\emptyset$ en otro caso.

$$F(x) = z \leftrightarrow (((x \text{ es función } \rightarrow (\forall w \in z \exists b \in \bigcup(\bigcup x)(\langle b, w\rangle \in x)$$
$$(\forall y \in x(y = \langle b, w\rangle) \rightarrow w \in z)) \vee (x \text{ no es función } \rightarrow z = \emptyset))$$

15. $F(x, y) = x[y](= \{x(t) : t \in y\})$ si x es una función, $\emptyset$ en otro caso.

$$F(x, y) = z \leftrightarrow ((x \text{ es función } \rightarrow \forall w \in z \exists t \in y(w = x(t)) \wedge (\forall t \in y(x(t) \in z)))$$
$$\vee(x \text{ no es función} \rightarrow z = \emptyset)$$

16. $F(x, y) = x \restriction y$ si x es una función, $\emptyset$ en otro caso

$$F(x, y) = z \leftrightarrow ((x \text{ es función } \rightarrow \forall w \in z \exists t \in y(w = \langle t, x(t)\rangle) \wedge (\forall t \in y(x(t) \in z)))$$
$$\vee(x \text{ no es función} \rightarrow z = \emptyset)$$

17. $F(x) = x^{-1}$ si x es una relación, $\emptyset$ en otro caso.

$$F(x) = z \leftrightarrow (x \text{ es función} \rightarrow (\forall w \in z \forall t_1 \in \bigcup(\bigcup x)(w = \langle t_1, t_2\rangle \rightarrow \langle t_2, t_1\rangle \in x))$$
$$\vee(x \text{ no es función } \rightarrow z = \emptyset)$$

18. $F(x) = x \cup \{x\}$;

$$F(x) = z \leftrightarrow (\forall w \in z(w \in x \vee w = x) \wedge (\forall w \in x(w \in z)) \wedge (w \in z))$$

19. x es transitivo;

$$\forall y \in x \forall z \in y(z \in x)$$

20. x es un ordinal;

$$x \text{ es transitivo } \wedge (\forall y \in x(y \text{ es transitivo}))$$

21. x es un ordinal sucesor;

$$x \text{ es un ordinal } \wedge (\exists y \in x(x = y \cup \{y\}))$$

22. *x es un ordinal límite*

$$(x \text{ es ordinal }) \wedge (x \text{ no es un ordinal sucesor})$$

23. $x : y \longrightarrow z$

$$x \text{ es una función} \wedge (domx = y) \wedge (ranx = z)$$

24. $x : y \longrightarrow z$ *biyectiva*

$$x \text{ es una función} \wedge (domx = y) \wedge (ranx = z) \wedge x^{-1} \text{ es función}$$

25. *x es un número natural.*

$$x \text{ es un ordinal } \wedge (x \text{ es sucesor}) \wedge \forall y \in x (y \text{ es un sucesor })$$

26. $x = \omega$

$$y \in \omega \leftrightarrow y \text{ es un natural}$$

27. *x es una sucesión finita de elementos de y*

$$(x : y \to z) \wedge (y \text{ es un número natural })$$

Lema 19. *Suponga que F y G son Δ_0^{ZF} términos clase. Entonces $F(x) = G(y)$ es Δ_1^{ZF}*

Demostración. Sean $\varphi(\bar{x}, z)$ y $\chi(\bar{y}, t)$ Σ_0-fórmulas tal que φ define a F y ψ define a G, Entonces:

$$ZF \vdash F(x) = G(y) \leftrightarrow (\exists z(\varphi(\bar{x}, z) \wedge \chi(\bar{y}, z)))$$

.

La cuál es Σ_1 y

$$F(\bar{x}) \neq G(\bar{y}) \leftrightarrow \exists z \exists t(\varphi(\bar{x}, z) \wedge \chi(\bar{y}, t) \wedge \neg z = t)$$

la cuál es Σ_1
Por lo tanto "$F(\bar{x}) = G(\bar{y})$" es Δ_1^{ZF}.

□

Definición 20. Una fórmula ϕ es Σ_{n+1} si es de la forma $\exists v_1 \ldots \exists v_k \varphi$, donde φ es Π_n, analálogamente decimos que ϕ es Π_{n+1} si es de la forma $\forall v_1 \ldots \forall v_k \varphi$, donde φ es Σ_n. Si T es una teoría de $\mathcal{L}$, una fórmula ϕ es Σ_n^T si y sólo si existe una fórmula φ, la cuál es Σ_n y $T \vdash \phi \leftrightarrow \varphi$; Similarmente para Π_n^T.

Lema 21. *Sea T una LTC teoría cuyos axiomas incluyen los axiomas de ZF, entonces:*

i) *Sean $n \geq 1$ y $\phi(\vec{z})$ una Σ_n fórmula. Entonces existe una Σ_0 fórmula $\psi(\vec{x}, \vec{z})$ tal que:*

$$T \vdash \phi(\vec{z}) \leftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \exists x ... - x_n \psi(x_1, ..., x_n, \vec{z}).$$

ii) *Sea $n \geq 1$ y sea $\phi(\vec{z})$ una Π_n fórmula. Entonces existe una Σ_0 fórmula $\psi(\vec{x}, \vec{z})$ tal que:*

$$T \vdash \phi(\vec{z}) \leftrightarrow \forall x_1 \exists x_2 \forall x ... - x_n \psi(x_1, ..., x_n, \vec{z}).$$

Demostración. i) Consideremos el caso $n = 1$. En general una Σ_1 fórmula tiene la forma:

$$\phi(\vec{z}) \equiv \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_m \theta(y_1, \ldots, y_m, \vec{z})$$

donde θ es Σ_0. Si $m = 1$, se cumple trivialmente, por lo que supongamos que $m = 2$ (los casos para $m > 2$ son similares). Sea $\psi(x, \vec{z})$ la fórmula:

$$(x \text{ es un par ordenado } \wedge \theta((x)_0), (x_1, \vec{z})$$

Entonces ψ es Σ_0, entonces

$$T \vdash \phi(\vec{z}) \leftrightarrow \exists x \psi(x, \vec{z})$$

.

Ahora para $n = 2$, supongamos que $\phi(\vec{z})$ es la fórmula

$$\exists u_1 \exists u_2 \ldots \exists u_p \forall v_1 \ldots \forall v_q \theta(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$$

donde θ es Σ_0. Sea $\psi(x, y, \vec{z})$ la fórmula

$$(x \text{ es una } p\text{-tupla }) \wedge (y \text{ es una } q\text{-tupla}) \to \theta((x)_0^p, \ldots, (x)_{p-1}^p, (y)_0^q, \ldots, (y)_{q-1}^q)$$

Observemos que ψ es Σ_0, por lo que

$$T \vdash \phi(\vec{z}) \to \exists \forall y \psi(x, y, z)$$

.

Los casos donde $n \geq 2$ son análogos.

ii) Es análogo.

□

Lema 22. i) *Si ϕ es una Σ_n-fórmula de LTC, entonces $(\forall x \in y)\phi$ es Σ_n^{ZF}*

ii) *Si ϕ es una Π_n fórmula de LTC, entonces $(\exists x \in y)\phi$ es Π_n^{ZF}*

Demostración. Probaremos i) y ii) simultaneámente por inducción sobre n. Para $n = 0$ no hay nada que probar. supongamos que i) y ii) ocurren para n. Probaremos $i)$ y $ii)$ para $n + 1$.

i) Sea ϕ una Σ_{n+1} por lema 21 existe una Π_n-fórmula ψ tal que:

$$ZF \vdash \phi \leftrightarrow \exists z \psi$$

Por lo que:

$$ZF \vdash (\forall x \in y)\phi \leftrightarrow (\forall x \in y)\exists z\psi$$

.

Usando el axioma de remplazo tenemos:

$$ZF \vdash (\forall x \in y)\exists z\psi \leftrightarrow \exists u(\forall x \in y)(\exists z \in u)\psi$$

Asi:

$$ZF \vdash (\forall x \in y)\phi \leftrightarrow \exists u(\forall x \in y)(\exists z \in u)\psi.$$

Por hipótesis de inducción $(\exists z \in u)\psi$ es Π_n^{ZF}, por lo que $(\forall x \in y)(\exists z \in u)\psi$ es Π_n^{ZF}, entonces $\exists u(\forall x \in y)(\exists z \in u)\psi$ es Σ_{n+1}^{ZF}, es decir $(\forall x \in y)\phi$ es Σ_{n+1}^{ZF}.

ii) Ahora supongamos que ϕ es ϕ_{n+1}, entonces $\neg\phi$ es Σ_{n+1}^{ZF}, por lo anterior sabemos que $(\forall x \in y)\neg\phi$ es Σ_{n+1}^{ZF} de donde se sigue que $\neg(\exists x \in y)\phi$ es Σ_{n+1}^{ZF} por lo que $(\exists x \in y)\phi$ es ϕ_{n+1}^{ZF}. □

Teorema 23. *Suponga $F : V \times V \longrightarrow V$ es un Δ_1^{ZF} término clase. Entonces el término clase G definido desde F por recursión sobre On es Δ_1^{ZF}, es decir:*

1. $G(0, x) = x$
2. $G(\alpha + 1, x) = F(G(\alpha, x), x)$ *para todo* $\alpha \in On$
3. $G(\delta, x) = \bigcup_{\alpha \in \delta} G(\alpha, x)$ *para* δ *límite.*
4. $G(y, x) = \emptyset$ *para toda* $y \notin On$.

   Es un término clase Δ_1^{ZF}

Demostración. Definamos $\phi(g, \alpha, x)$ como sigue:

$$\begin{array}{ll}
On(\alpha) & \chi_1 \\
\bigwedge g \text{ es una función} & \chi_2 \\
\bigwedge \mathrm{dom} g = \alpha \cup \{\alpha\} & \chi_3 \\
\bigwedge g(0) = x & \chi_4 \\
\bigwedge \forall \beta \in \alpha \exists y_1 \exists y_2 (y_1 = \beta \cup \{\beta\} \wedge y_2 = g(\beta) \wedge g(y_1) = F(y_2)) & \chi_5 \\
\bigwedge \forall \beta \in \alpha (\beta \text{ es ordinal límite} \rightarrow g(\beta) = \cup\{g(\alpha) : \alpha \in \beta\}) & \chi_6
\end{array}$$

χ_1 es Σ_0^{ZF} por Teorema 18(20) y por tanto Σ_1^{ZF};
χ_2 es Σ_0^{ZF} por Teorema 18(12) y por tanto Σ_1^{ZF};
χ_3 es Σ_0^{ZF} por teorema 18(18), (13) y anterior, se sigue que es Σ_1^{ZF};
χ_4 podemos rescribirla como $\exists y(\forall z \in y(z \notin y) \wedge g(y) = x)$, la cual es Σ_1^{ZF};
χ_5 es Σ_1^{ZF} por Teorema 18(18), (15), 22 y el hecho de que F es Σ_1^{ZF};

χ_6 es Σ_1^{ZF} usando Teorema 18(22), (15) y el hecho de que "$g(\beta) = \cup\{g(\alpha) : \alpha \in \beta\}$" es equivalente a $\exists y \exists z(y = g[\beta] \wedge z = \cup y \wedge g(\beta) = z)$, la cuál es Σ_1^{ZF} por Teorma 18(12),(7)y (15.)

Por lo que $\phi(g, \alpha, x)$ es Σ_1^{ZF}, pues es la conjunción de fórmulas las cuales son Σ_1^{ZF} cada una de ellas.

Ahora $G(\alpha, x) = y \leftrightarrow (\exists g(\phi(g, \alpha, x)) \wedge g(\alpha) = y) \vee (\neg On(\alpha) \wedge y = \emptyset))$. Así mostramos que G es Σ_1^{ZF} y por tanto Δ_1^{ZF}.

□

2.3. La Jerarquía de Von Neumann

Para finalizar esta sección definiremos la Jerarquía de Von Newman, aunque esta jerarquía no es el estudio principal de este trabajo, algunas veces es requerida.

Definición 24. La Jerarquía de Von Neumann se define por recursión transfinita en los ordinales así:

$V_0 := \emptyset$

$V_{\alpha+1} := Pot(V_\alpha)$ donde $Pot(V_\alpha)$ denota el conjunto potencia de V_α

$V_\lambda := \bigcup\limits_{\beta<\lambda} V_\beta$, λ límite.

$V := \bigcup\limits_{\alpha \in On} V_\alpha$.

Donde $\bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$ significa que para cualquier conjunto x existe $\alpha \in On$ tal que $x \in V_\alpha$

Lema 25. *Para todo ordinal α se cumple:*

i) V_α es transitivo.

ii) $V_\beta \subseteq V_\alpha$ para toda $\beta < \alpha$

Demostración. Se probará (i) y (ii) simultaneamente por inducción sobre α. Para $\alpha = 0$, las dos afirmaciones son triviales, pues el vacio es transitivo por vacuidad, y esta contenido en cualquier conjunto. Suponiendo que ambas se cumplen para α, se probará que se cumplen para $\alpha + 1$. Primero se veamos que $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$. Sea $x \in V_\alpha$, por (i), se sigue que $x \subseteq V_\alpha$, así $x \in Pot(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$.

Caso sucesor. Para (ii) se supone que $\beta < \alpha + 1$, entonces $\beta \leq \alpha$, por hipóteis de inducción $V_\beta \subseteq V_\alpha$, y en consecuencia $V_\beta \subseteq V_{\alpha+1}$. Ahora se verá que $V_{\alpha+1}$ es transitivo, suponiendo que V_α es transitivo. Sea $x \in y \in V_{\alpha+1}$, entonces $y \subseteq V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$, es decir $x \in V_{\alpha+1}$.

Caso límite. Para probar (i) suponga que $x \in y \in V_\gamma$, entonces por definición de V_γ, existe un $\alpha < \gamma$ tal que $y \in V_\alpha$, como V_α es transitivo por hipóteisis de inducción se tiene que $x \in V_\alpha$, por definición $x \in V_\gamma$. El inciso (ii) se sigue de la definición de V_γ. □

Es fácil notar que V contiene a todos los ordinales, pues $\alpha \in V_{\alpha+1}$, la prueba es por inducción sobre On: para $\alpha = 0$, se tiene que $V_1 = Pot(V_\alpha) = 0$, por lo que $0 \in V_1$.

Supongamos que $\alpha = \gamma + 1$, y que $\gamma \in V_{\gamma+1}$, como $V_{\gamma+1}$ es transitivo entonces $\gamma \subseteq V_{\gamma+1}$, por lo que $\alpha = \gamma \cup \{\gamma\} \subseteq V_{\alpha+1} = V_\alpha$, es decir $\alpha \in Pot(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$.

Ahora supongamos que α es límite, y que $\gamma \in V_{\gamma+1}$ para $\gamma < \alpha$, entonces $\alpha \subseteq V_\alpha$, es decir $\alpha \in Pot(V_{\alpha+1})$.

Definición 26. Se define el rango de x, $rn(x)$, como el menor ordinal α tal que $x \in V_{\alpha+1}$.

Teorema 27. *Sean x un conjunto y $\alpha \in On$. Entonces:*

i) $V_\alpha = \{y : rn(y) < \alpha\}$

ii) *Si $y \in x$ entonces $rn(y) < rn(x)$*

iii) *Si $y \subseteq$ entonces $rn(y) \leq rn(x)$*

iv) $rn(x) = \sup(rn(y) + 1) \quad y \in x$

v) $rn(\alpha) = \alpha$

vi) $V_\alpha \cap Or = \alpha$

Demostración. i) Suponiendo que $y \in V_\alpha$, entonces $\alpha \neq 0$. Si α es un ordinal sucesor digamos $\alpha = \beta + 1$, entonces $rn(y) \leq \beta$. Si ocurriera que α es límite, $y \in V_\beta$ para algún $\beta < \alpha$, por el lema anterior $y \in V_{\beta+1}$, así $rn(y) \leq \beta < \alpha$. Para la otra contención, supongamos que $rn(y) = \beta < \alpha$, entonces $y \in V_{\beta+1} \subseteq V_\alpha$, como se busca.

ii) Sea $y \in x$ y supongamos $rn(x) = \alpha$, así $x \in V_{\alpha+1} = Pot(V_\alpha)$, por lo que $x \subseteq V_\alpha$, de aquí $y \in V_\alpha$, por (i) $rn(y) < \alpha$.

iii) Análogamente sea $rk(x) = \alpha$,por las mismas razones que (ii) $x \subseteq V_\alpha$, y por lo tanto $y \subseteq V_\alpha$, por lo que $y \in V_{\alpha+1}$, se sigue que $rn(y) \leq \alpha$, es decir $rn(y) \leq rn(x)$.

iv) Sea el $\alpha = \sup(rn(y) + 1)$ con $y \in x$. Observemos $\alpha \leq rn(x)$, que se cumple por (ii). Para la otra desigualdad, sea $y \in x$, observemos que $rn(y) < \alpha$ y $y \in V_{rn(y)+1} \in V_\alpha$, entonces $x \subseteq V_\alpha$, y por lo tanto $x \in V_{\alpha+1}$, por lo que $rn(x) \leq \alpha$.

v) Por inducción trasfinita.

$\alpha = 0$ Sea $\alpha = 0$, por definición $V_0 = 0$, y $V_1 = Pot(V_0) = \{0\}$, por lo que $rn(0) = 0$.

Caso sucesor Supongamos que $\alpha = \gamma + 1$, y el $rn(\gamma) = \gamma$, es decir γ es el menor ordinal tal que $\gamma \in V_{\gamma+1}$, observemos que $\{\gamma\} \in Pot(V_{\gamma+1}) = Pot(V_\alpha)$, por lo que $\alpha \in V_{\alpha+1}$ además $\alpha \notin V_\lambda$ para $\lambda < \alpha + 1$, por lo que $rn(\alpha) \leq \alpha$.

Caso límite Suponga que es cierto para $\beta < \alpha$. Por (iv):

$$rn(\alpha) = \sup_{\beta<\alpha}((\beta)+1) = \sup_{\beta<\alpha}(\beta+1) = \alpha$$

vi) Usando (i) y (v), se tiene:

$$V_\alpha \cap On = \{\beta \in On | \beta \in V_\alpha\} = \{\beta \in On | rn(\beta) < \alpha\} = \{\beta \in On | \beta < \alpha\} = \alpha.$$

$\square$

Capítulo 3

El Universo Construible de Gödel

3.1. Nociones básicas. Principio de Reflexión de Levy.

Sea X un conjunto. Por $Def(X)$ se entiende el conjunto de todos los subconjuntos a de X, tal que para alguna fórmula $\phi(v_0)$ de $\mathcal{L}_X$ ($\mathcal{L}_X$ denota la expansión de primer orden de $\mathcal{L}$ obtenida introduciendo una constante $\dot{m}$ para cada $m \in X$) con una variable libre v_0:

$$a = \{x | \langle X, \in \rangle \models \phi[\dot{x}]\} \qquad (*)$$

es decir $a \in Def(X)$ si a es de la forma $(*)$.

Definición 28. Por recursión sobre $\alpha \in On$, se define:
$L_0 = \emptyset$
$L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$
$L_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} L_\alpha$ si $\text{lím}(\delta)$
$\langle L_\alpha | \alpha \in On \rangle$ es la jerarquía construible. La clase $\bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha = L$ es el universo construible. Un conjunto x es contruible si y sólo si $x \in L$. Como $x \in L \leftrightarrow \exists \alpha (x \in L_\alpha)$. Es decir x es construible si y solo si existe $\alpha \in On$ tal que $x \in L_\alpha$.

Debido al teorema de recursión la fórmula "v_0 es construible" es expresable en $\mathcal{L}$ (en LTC), que se probará más adelante.

Algunas observaciones:

- $L_\alpha \subseteq V_\alpha$. Por inducción sobre α.

  Para $\alpha = 0$ es inmediato.

  Supongamos que $\lambda = \alpha + 1$, y $L_\alpha \subseteq V_\alpha$, entonces:

$$L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha) \subseteq Pot(L_\alpha) \subseteq Pot(V_\alpha) = V_{\alpha+1}.$$

Supongamos que λ es límite y $L_\alpha \subseteq V_\alpha$, para $\alpha < \lambda$, entonces:

$$L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha, \text{ por otro lado}$$

$$V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$$

por lo que $L_\lambda \subseteq V_\lambda$.

- Para todo $n \leq \omega$ se cumple $L_\alpha = V_\alpha$. Por inducción sobre α.

  Para $\alpha = 0$, se tiene $L_0 = 0 = V_0$.

  Sea $\alpha < \omega$ y supongamos que $L_\alpha = V_\alpha$. Veamos que $L_{\alpha+1} = V_{\alpha+1}$. Por anterior es suficiente probar que $V_{\alpha+1} \subseteq L_{\alpha+1}$. Sea $x \in V_{\alpha+1}$ entonces $x \subseteq V_\alpha = L_\alpha$ y por lo tanto existen $a_1, a_2, ..., a_n \in L_\alpha$ tal que $x = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ (ya que V_α es finito para cada $\alpha < \omega$). Por lo tanto $x = \{z \in L_\alpha | L_\alpha \models (\dot{z}) = (\dot{a})_1, (\dot{a})_2, ..., (\dot{a})_n\} \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$. Por lo tanto $L_\alpha = V_\alpha$ para todo $\alpha < \omega$. Falta probar la afirmación para ω:

$$L_\omega = \bigcup_{\alpha\in\omega} L_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega} V_\alpha = V_\alpha$$

Definición 29. Un conjunto a es llamado transitivo si $\forall x \in a \forall y \in x(y \in a)$, es decir $x \in a \to x \subseteq a$, o $a = \bigcup a$.

Definición 30. Un modelo interno $\mathcal{M}$, es un modelo transitivo, tal que $On \subseteq \mathcal{M}$, donde además se cumplen los axiomas de ZF, es decir se cumplen:

- Existencia existe el conjunto vacio, el cuál es denotado por $\emptyset$.
- Extensionalidad $\forall x \forall y[\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow z = y]$.
- Par $\forall x \forall y \exists z \forall w[w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y]$.
- Unión $\forall x \exists \forall[z \in y \leftrightarrow (\exists u \in x)(z \in u)]$.
- Infinito $\exists x[On(x) \wedge (\forall y \in x)(\exists z \in x)(y \in z)]$, donde $On(x)$, significa que x es un ordinal.
- Conjunto Potencia $\forall x \exists y \forall z[z \in y \leftrightarrow z \in x]$.
- Regularidad $\forall x[\exists(y \in x) \to \exists y(y \in x \wedge (\forall z \in y)(z \notin x))]$.
- Esquema de Separación $\forall x \exists y \exists z[z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \phi(z)]$, donde ϕ es una $\mathcal{L}$-fórmula con variable libre z.
- Esquema de remplazo $\forall x \exists y \phi(x, y) \to (\forall u)(\exists v)(\forall x \in u)(\exists y \in v)\phi(x, y)$, donde ϕ es una $\mathcal{L}$-fórmula con variables libres x, y.

Ahora se probará que L es un modelo interno.

Lema 31. *i)* $\alpha < \beta \to L_\alpha \cup \{L_\alpha\} \subseteq L_\beta$

ii) Para todo $\alpha \in On$, L_α *es transitivo. Por lo que* L *es transitivo.*

iii) Para todo $\alpha \in On$ $\alpha \cap L = \alpha \cap L_\alpha = \alpha$ *y* $\alpha \in L_{\alpha+1}$ *por lo que* $On \subseteq L$

Demostración. i) Por inducción sobre $\beta > \alpha$. $\beta = 0$ trivial. Para el caso sucesor y límite son necesarias dos observaciones:

1) $L_\alpha \subseteq L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$. Sea $a \in L_\alpha$ entonces $a = \{x | L_\alpha \models \dot{x} \in \dot{a}\}$ lo que indica que $a \in Def(L_\alpha)$ es decir $a \in L_{\alpha+1}$ por lo que $L_\alpha \subseteq L_{\alpha+1}$.

2) L_α es definible y por lo tanto $L_\alpha \in L_{\alpha+1}$. Solo basta darse cuenta de que $L_\alpha = \{x \in L_\alpha | L_\alpha \models \dot{x} = \dot{x}\}$ como consecuencia $\{L_\alpha\} \subseteq L_{\alpha+1}$.

Caso susesor. Sea $\beta = \gamma + 1$.

Sea $\alpha < \beta$, $\alpha \leq \gamma$ si $\alpha < \gamma$, por hipótesis de inducción $L_\alpha \cup \{L_\alpha\} \subseteq L_\gamma \subseteq L_{\gamma+1} = L_\beta$ (usando la observación 1). Por lo que $L_\alpha \cup \{L_\alpha\} \subseteq L_\beta\ \forall \alpha < \beta$.

Si $\alpha = \gamma$, por las observaciones $L_\alpha \subseteq L_{\gamma+1}$ y $\{L_\alpha\} \subseteq L_{\gamma+1}$, por lo tanto, $L_\gamma \cup \{L_\gamma\} \subseteq L_\beta$.

Caso límite. Sea β límite. Sea $\alpha < \beta$ siempre ocurre $L_\alpha \subset L_\beta$ y por último $\{L_\alpha\} \subseteq L_\beta$, debido a que $\{L_\alpha\} \in L_{\alpha+1}$ y $\alpha + 1 < \beta$ por ser β límite, por lo que $L_{\alpha+1} \subseteq Ł_\beta$. por lo tanto $L_\alpha \cup \{L_\alpha\} \subseteq L_\beta$.

ii) Para $\alpha = 0$, L_0 es transitivo.

Supongamos que $\alpha = \gamma + 1$. Sea $x \in y \in L_\alpha$, supongamos que $y \in L_\beta$ con $\beta \leq \gamma$, entonces por hipótesis de inducción L_β es transitivo, y por lo tanto $x \in L_\beta$, usando (i) se tiene $L_\beta \subseteq L_\alpha$, por lo que $x \in L_\gamma$. Ahora supongamos que $y \in L_\gamma$ y $y \notin L_\beta$ para $\beta < \gamma$, entonces por definición $y = \{z \in L_\gamma | \phi(\dot{z})\}$ para alguna $\mathcal{L}_{L_\gamma}$-fórmula, por lo tanto $z \in y \to z \in L_\gamma$, esto se cumple en particular para x, por lo que $x \in L_\gamma$ y nuevamente usando (i), se tiene $x \in L_\gamma$.

Sea α límite y supongamos que L_β es transitivo para todo $\beta < \alpha$ y $x \in y \in L_\alpha$, entonces por definición $y \in L_\beta$, para algún $\beta < \alpha$, por hipótesis de inducción L_β es transitivo, es decir $x \in L_\beta$, y otra vez por (i), $x \in L_\alpha$. En realidad esto demuestra que la unión de transitivos es transitiva, pues no se utilizó ninguna propiedad particular de L_α, aparte de su transitividad.

Para completar la prueba de este inciso falta ver que L es transitivo: Pero esto se cumple pues L es unión de transitivos.

iii) Basta demostrar $On \cap L_\alpha = \alpha$, pues $\alpha \cap L_\alpha = (On \cap \alpha) \cap L_\alpha = \alpha$ y por lo tanto $\alpha \cap L = (\alpha \cap L_\alpha) \cap L = \alpha$

Para $\alpha = 0$ es trivial.

Caso sucesor. Suponiendo $On \cap L_\alpha = \alpha$. Por demostrar que también es cierto para $\alpha + 1$.

Sea $z \in \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$, si $z \in \alpha$ por hipótesis de inducción $z \in On \cap L_\alpha \subset On \cap L_{\alpha+1}$. Si $z = \alpha$, observemos que $a = \{u \in L_\alpha | L_\alpha \models On(u)\} \in L_{\alpha+1}$, por lo que $a \in L_{\alpha+1}$; falta ver que $a = \alpha$. Sea $y \in a$ entonces y es un ordinal en L_α, por hipótesis de inducción $L_\alpha \cap On = \alpha$, por lo que $y \in \alpha$, la otra dirección es análoga. Hasta aquí se ha probado $\alpha + 1 \subseteq On \cap L_\alpha$.

Para la otra contención sea $z \in On \cap L_{\alpha+1}$, si $z \in On$ y $z \in L_\beta$ con $\beta \leq \alpha$, entonces $z \in On \cap L_\beta$ por hipótesis de inducción se tiene $z \in \beta \subseteq \alpha + 1$. Si $z \in On$ y $z \in L_\alpha$, pero $z \notin L_\beta$ para $\beta < \alpha$, entonces $z = \{u \in L_\alpha | L_\alpha \models On(u)\}$ donde cada $u \in z$, $u \in On \cap L_\alpha \subseteq \alpha$, y por hipótesis z es un ordinal, concluimos que $z \in \alpha + 1$.

Caso Límite. Supongamos que $\forall \gamma < \alpha\ On \cap L_\gamma = \gamma$. Por demostrar $On \cap L_\alpha = \alpha$.

Sea $\xi \in On \cap L_\alpha$, entonces $\xi \in On$ y $\xi \in L_\alpha$, para algún $\gamma < \alpha$ pero $L_\gamma \cap On = \gamma$, $\xi \in \gamma \in \alpha$, por la tanto $\xi \in \alpha$.

Sea $\xi \in \alpha$, ξ es un ordinal y $\xi < \alpha$ y como α es límite $\xi + 1 < \alpha$ por lo que $\xi \in \xi + 1 = On \cap L_{\xi+1} \subseteq On \cap L_\alpha$.

□

Corolario 32. *Para $\alpha > \omega$ se tiene $|L_\alpha| = |\alpha|$, en particular si κ es un cardinal mayor que ω, se tiene $|L_\kappa| = \kappa$.*

Demostración. Por anterior para toda α, $L \cap \alpha = L_\alpha \cap On = \alpha$, por lo que $|\alpha| \leq |L_\alpha|$ para toda α. Probaremos la otra desigualdad por inducción sobre $\alpha > \omega$.

Sea $\alpha = \omega$, entonces $L_\omega = V_\omega$. Como V_α es finito para toda $\alpha < \omega$, se tiene que $|\bigcup_{\alpha<\omega} V_n| \leq |\omega|$, pues $|V_n| \leq |\omega|$ para cada n.

Supongamos que $|L_\alpha| \leq |\alpha|$. Como $\mathcal{L}$ es numerable el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_{L_\alpha}$, tiene cardinalidad $|L_\alpha|$ entonces:

$$|L_{\alpha+1}| = |Def(L_\alpha)| \leq |L_\alpha| \leq |\alpha|.$$

Supongamos que λ es límite y que $|L_\alpha| \leq |\alpha|$ para toda $\alpha < \lambda$. Entonces:

$$|L_\lambda| \leq |\bigcup_{\alpha<\lambda}| \leq \Sigma_{\alpha<\lambda}|L_\alpha| \leq \Sigma_{\alpha<\lambda}|\alpha| = |\lambda|$$

□

Definición 33. Relativización de fórmulas. Supongamos que U es un término clase, es decir $\{x|\Phi(x)\}$, y ϕ una fórmula de LTC. Definimos la fórmula $\phi^U(v_1, ..., v_k)$ (o $\Phi^U(v_1, ..., v_k)$) por recursión como sigue:

- i) Si ϕ es $v_i = v_j$ o $v_i \in v_j$, entonces ϕ^U es ϕ.
- ii) Si ϕ es $\neg\psi$, entonces ϕ^U es $\neg\psi^U$.
- iii) Si ϕ es $(\psi_1 \vee \psi_2)$, entonces ϕ^U es $\psi_1^U \vee \psi_2^U$

- iv) Si ϕ es $\forall v_i \psi$, entonces ϕ^U es $\forall v_i(\Phi(v_i) \to \psi^U)$.

Tácitamente asumimos que ϕ y Φ no tienen variables acotadas en común.

Para mostrar que L es un modelo interno de ZF, es importante el siguiente teorema.

Teorema 34. *(Principio de Reflexión de Levy). Suponga que $\tilde{W} : On \to V$ es un término clase; se escribe W_α para $\tilde{W}(\alpha)$ donde cada W_α es transitivo y supongamos que $\tilde{W}$ satisface:*

1. $\alpha < \beta \to W_\alpha \subseteq W_\beta$ $(\forall \alpha, \beta \in On)$
2. $W_\delta = \bigcup_{\alpha \in \delta} W_\alpha$ *para todo ordinal límite* δ.

Sea $W = \bigcup_{\alpha \in On} W_\alpha$ $(= \{x | \exists \alpha \in On, x \in W_\alpha\}$*; también W es un término clase clase y cada W_α es un conjunto. Debido a la transitividad de W_α para toda α se tiene que W es transitivo, pues es unión de transitivos.*

Supongamos que $\chi(v_1, ..., v_n)$ es una fórmula de LST sin parámetros. Entonces para cualquier $\alpha \in On$, existe $\beta \in On$ tal que $\beta \geqslant \alpha$ y tal que:
$\forall a_1, ..., a_n \in W_\beta$ $\langle W, \in \rangle \models \chi(a_1, ..., a_n)$ *si y sólo si* $\langle W_\beta, \in \rangle \models \chi(a_1, ..., a_n)$ *es decir para todo* $a_1, ..., a_n \in W_\beta$, $\chi^W(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow \chi^{W_\beta}(a_1, ..., a_n)$.

Demostración. Para cualquier fórmula ϕ de LST. La colección $SF(\phi)$ de subfórmulas de ϕ, se define por recursión en la fórmula ϕ.

1. $SF(\phi) = \{\phi\}$ si ϕ es de la forma $x = y$ o $x \in y$.
2. $SF(\neg\phi) = \{\neg\phi\} \cup SF(\phi)$.
3. $SF(\phi \vee \varphi) = \{\phi \vee \varphi\} \cup SF(\phi) \cup SF(\varphi)$.
4. $SF(\forall x \phi) = \{\forall x \phi\} \cup SF(\phi)$.

Claramente $SF(\phi)$ es una colección finita para cualquier fórmula ϕ y $\phi \in SF(\phi)$. Suponga ahora que S es una colección finita de fórmulas, la cuál es cerrada bajo subfórmulas es decir si $\phi \in S$, $SF(\phi) \subseteq S$. Definimos:

$$T_S = \{\beta \in On | \forall \chi \in S \forall a \in W_\beta (\chi^{W_\beta}(a) \leftrightarrow \chi^W(a))\}.$$

Se debe mostrar que T_S no es acotado en los ordinales. Pero para esto necesitamos el siguiente lema:

Lema 35. *Para cualquier conjunto S definido como antes, T_S es una clase cerrada de ordinales, es decir, contiene a todos sus límites, esto es, si X es un subconjunto de T_S, entonces* $\sup X \in T_S$.

Demostración. La prueba de esto es por inducción sobre el número total de ocurrencias de conectivos en las fórmulas de S (no cuantificadores). Escribimos esto como $n = \sharp S$.

Si $n = 0$ (no tiene conectivos) entonces todas las fórmulas de S son de la forma $x = y$ o $x \in y$ (para variables x, y), pues $\forall x(x = y)$, $\forall x(x \in y)$, $\forall y(x = y)$ y $\forall y(x \in y)$ no son válidas, por lo tanto $T_S = On$: ya que siempre $T_S \subseteq On$ para la otra contención se toma $\beta \in On$ queremos ver que $\forall a \in W_\beta(\chi^{W_\beta}(a) \leftrightarrow)\chi^W(a)$.

Tomamos el caso $\chi \equiv x = y$ pues cuando $\chi \equiv x \in y$ es similar. Sean $a, b \in W_\beta$, supongamos que $\langle W_\beta, \in\rangle \models a = b$ y que $\langle W, \in\rangle \not\models a = b$, entonces existe $z \in a$ tal que $z \notin b$ (o al revés), pero como W_β es transitivo, $z \in W_\beta$ por lo que $\langle W_\beta, \in\rangle \not\models a = b$ lo que es una contradición de donde se concluye $\langle W, \in\rangle \models a = b$. La otra dirección es análoga. Como $T_S = On$ por definición es cerrado.

Ahora si $\sharp S = n + 1$. Auxiliémonos de $S' = S \backslash A$ donde A contiene todas las fórmulas con un número máximo de conectivos. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $A = \{\chi\}$ con χ una fórmula en S con un número máximo de conectivos (notemos que χ no es subfórmula propia de ninguna fórmula).

Claramente $\sharp S' \leq n$ y $S' \subset S$ y por lo tanto $T_S \subseteq T_{S'}$, además S' también es cerrado respecto subfórmulas pues la única posibildad de que no esto sucediera sería si χ fuera subfórmula de alguna fórmula de S' lo cuál no puede ocurrir.

Sea $X \subseteq T_S$ y supongamos que $\sup X \notin T_s$. Note que $X \subseteq T_S \subseteq T_{S'}$, por hipótesis de inducción $\sup X \in T_{S'}$. Se debe mostrar que $\sup X \in T_S$.

Caso 1. $\chi \equiv \neg\varphi$. Entonces $\varphi \in S'$ afirmamos que $T_S = T_{S'}$.

Demostración. Se sabe que siempre $T_S \subseteq T_{S'}$. Para la otra contención tomemos $\beta \in T_{S'}$ entonces $\forall \varphi \in S' \forall \vec{a} \in W_\beta(\varphi^{W_\beta}(\vec{a}) \leftrightarrow \varphi^W(\vec{a}))$. Suponiendo que para β, y para alguna $a \in W_\beta$ no pasa $\neg\varphi^{W_\beta}(\vec{a}) \leftrightarrow \neg\varphi^W(\vec{a})$, supongamos que $\neg\varphi^{W_\beta}(\vec{a})$ y no ocurre $\neg\varphi^W(\vec{a})$ entonces $\varphi^W(\vec{a})$, por hipótesis de inducción $\varphi^{W_\beta}(\vec{a})$, una contradicción, análogamente si se supone que $\neg\varphi^W(\vec{a})$ y no $\neg\varphi^{W_\beta}(\vec{a})$. Por lo tanto, $T_{S'} \subseteq T_S$. □

Por esta afirmación concluimos que $\sup X \in T_S$.

Caso 2. $\chi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$. Entonces nuevamente $\varphi_1, \varphi_2 \in S'$, y por un razonamiento semejante al caso 1, $T_S = T_{S'}$ y otra vez se concluye $\sup X \in T_S$.

Caso 3. $\chi \equiv \forall n + 1\varphi(v_1, ..., v_{n+1})$, entonces $\varphi(v_1, \ldots, v_{n+1}) \in S'$. Sea $\eta = \sup X$ recordemos que $X \subseteq T_S$. Supongamos que X no tiene mayor elemento, entonces η es un ordinal límite; además,

$$W_\eta = \bigcup_{\alpha<\eta} W_\alpha = \bigcup_{\alpha\in X} W_\alpha.$$

La primera igualdad se debe a la definición de W_η y la segunda a que los W_α son transitivos.

Por hipótesis de inducción se tiene que, para toda $\vec{a} \in W_\eta$

$$\varphi^{W_\beta}(a) \leftrightarrow \varphi^W(\vec{a}), \qquad \text{(I)}$$

por lo que sólo se debe mostrar

$$\forall \vec{a} \in W_\eta(\chi^{W_\eta}(\vec{a}) \leftrightarrow \chi^W(\vec{a})). \qquad \text{(II)}$$

Como $X \subseteq T_S$, se tiene:

$$\forall \beta \in X \forall \vec{a} \in W_\beta(\chi^{W_\beta}(\vec{a}) \leftrightarrow \chi^W(\vec{a})) \qquad \text{(III)}$$

lo que comprueba ($\Leftarrow$) en (II).

Para la otra implicación se supone $\vec{a} \in W_\eta$ y $\chi^{W_\eta}(\vec{a})$. Como $W_\eta = \cup_{\alpha\in X} W_\alpha$ se tiene $\vec{a} \in W_\beta$ para alguna $\beta \in X$. No olvidemos que $\chi \equiv \forall n+1\psi(v_1,...,v_n)$ por lo que $\forall v_{n+1} \in W_\eta \varphi^{W_\eta}(\vec{a}, v_{n+1})$. Como $W_\beta \subseteq W_\eta$, en particular $\forall v_{n+1} \in W_\beta \varphi^{W_\eta}(\vec{a}, v_{n+1})$. Sea $a_{n+1} \in W_\beta$, entonces por (I) $\varphi^W(\vec{a}, a_{n+1})$. Sin embargo $\beta \in X \subseteq T_{S'}$ (y $\varphi \in S'$), entonces φ^{W_β}. Como $a_{n+1} \in W_\beta$, es arbitrario, se concluye $\forall v_{n+1} \in W_\beta \varphi^{W_\beta}(\vec{a})$ es decir $\chi^{W_\beta}(\vec{a})$ y por (III) se tiene $\chi(a)$ lo que termina la demostración del lema.

□

Para completar la prueba del teorema se mostrará que $\forall \alpha \in On \exists \beta \in On(\beta > \alpha \wedge \beta \in T_S)$, es decir T_S no es acotado.

La prueba es otra vez por inducción sobre $\sharp S$ y el único caso no trivial es cuando χ es $\forall v_{n+1}\varphi(\vec{v}, v_{n+1})$.

Por nuestra hipótesis de inducción se tiene:

$$\forall \alpha \exists \beta > \alpha \beta \in T_{S'} \qquad (IV)$$

Definimos el término $f : On \times V^n \longrightarrow On$ tal que $\forall \gamma \in On \forall a_1, ..., a_n \in V, f(\gamma, a_1, ...a_n)$ es el menor elemento $\theta \in On$ tal que $\theta > \gamma$ y $\exists a_{n+1} \in W_\theta$ tal que $\neg\varphi^W(a_1, ..., a_n, a_{n+1})$, si tal θ existe.

Ahora se define el término $F : On \longrightarrow On$ tal que $\forall \gamma \in On$ $F(\gamma)$ es el menor $\theta \in T_{S'}$ con $\theta > \sup\{f(\gamma, a_1, ..., a_n) | \langle a_1, ..., a_n\rangle \in W^n_\gamma\}$ (Esto últmo es un conjunto por el axioma de remplazo, ya que W^n_γ lo es, y θ existe usando (IV))

Nótese que para todo γ, $F(\gamma) > \gamma$ y $F(\gamma) \in T_{S'}$ (ambas por definición) y si $a_1, ..., a_n \in W_\gamma \forall v_{n+1} \in W_{F(\gamma)} \varphi^W(a_1, ..., a_n, v_{n+1}) \to \forall v_{n+1} \in W\varphi^W \neg\varphi(a_1, ..., a_{n+1})$, por lo tanto para η mínimo $\exists a_{n+1} \in W_\eta \neg\varphi^W(a_1, ..., a_n, a_{n+1})$(ya que $W = \bigcup_{\eta \in On} W_\eta$), como $F(\gamma) \geq f(\gamma, a_1, ..., a_n) \geq \eta$, por lo tanto $\exists a_{n+1} \in W_{F(\gamma)} \neg\varphi a_1, ..., a_n, a_{n+1}$ya que $W_{F(\gamma} \supseteq W_\eta$ lo que provoca una contradicción.

Por el Teorema de Recursión sobre ω definimos la función $g : \omega \longrightarrow On$ por

1. $g(0) = F(\alpha)$
2. $g(n+1) = F(g(n))$

Sean $X = \operatorname{ran}(g)$. Claramente X no tiene mayor elemento ya que (F es estrictamente creciente) y $X \subseteq T_{S'}$ y $\beta = \sup X$. Como $T_{S'}$ es cerrado (lema anterior), se tiene $\beta \in T_{S'}$. Se tiene también que $\beta > \alpha$, y para $a_1, \ldots, a_n \in W_\beta$ se tiene:

$$\forall_{n+1} \in W_\beta \varphi^W(a_1 \ldots a_n, v_{n+1}) \qquad \text{(V)}$$

Pues si $a_1, \ldots, a_n \in W_\beta$ como $W_\beta = \bigcup_{W_{\gamma \in X}} W_\gamma$, se cumple $a_1, \ldots, a_n \in W_\gamma$, para alguna $\gamma \in X$. Suponiendo $\forall v_{n+1} \in W_\beta \varphi^W(a_1, \ldots, a_n, v_{n+1})$, como $F(\gamma) \in X$, y $W_{F(\gamma)} \subseteq W_\beta$ tenemos $\forall n+1 \in W_{F(\gamma)} \varphi^W(a_1, \ldots, a_n, v_{n+1})$, por (II) ocurre $\forall v_{n+1} \in W\varphi^W(a_1, \ldots, a_n, V_{n+1})$ como es requerido.

Para finalizar la prueba se muestra que (V) implica $\beta \in T_S$. Es decir queremos ver que $\forall \vec{a} \in W_\beta(\chi^{W_{\beta_1}}(\vec{a}) \leftrightarrow \chi^W(\vec{a}))$ donde $\chi(v) \equiv \varphi(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$. Sea $\vec{a} \in W_\beta(\vec{a})$ es decir $(\forall v_{n+1}\varphi(a_1, \ldots, a_n, v_{n+1}))^{W_\beta}$, equivalentemente $\forall v_{n+1} \in W_\beta \varphi^{W_\beta}(a_1, \ldots, a_n, v_{n+1})$ y como $\varphi \in S'$ (por hipótesis de inducción) y $\beta \in T_{S'}$ entonces $\forall a_{n+1} \in W_\beta\ \varphi^{W_\beta}(a_1, \ldots, a_n v_{n+1}) \leftrightarrow \varphi^W(a_1, \ldots a_n, v_{n+1})$. Por lo tanto $\forall v_{n+1} \in W_\beta \varphi^W(a_1, \ldots a_n, v_{n+1})$ por (V) tenemos $\forall v_{n+1} \in \varphi^W(a_1, \ldots, a_n, v_{n+1})$ es decir $(\forall v_{n+1}\varphi(a_1, \ldots, a_n, v_{n+1}))^W$.

Ahora supongamos que $\forall \vec{a} \in W_\beta$ y $\chi^W(\vec{a}) \equiv \forall v_{n+1} \in W\varphi^W(a_1 \ldots, a_n, v_{n+1})$, nuevamente usando que $\beta \in T_{S'}$ y $\varphi \in S$, ocurre que $\forall v_{n+1} \in W_\beta \varphi^W_\beta(a_1, \ldots, a_n, v_{n+1})$ por hipótesis de inducción. Lo que demuestra el teorema. □

Teorema 36. *(Gödel). L es un modelo interno de ZF.*

Demostración. Trabajando en ZF, mostraremos que para cada axioma ϕ de ZF, se cumple ϕ^L. En vista del lema 31, L es transitivo y $On \subseteq L$

Existencia. $\varnothing \in L$, pues $L_1 = \{\varnothing\}$.

Extensionalidad. Sea $x, y \in L$. Se Debe mostrar que $x = y \leftrightarrow (\forall z \in L)(z \in x \leftrightarrow z \in y)$. La extensionalidad se cumple para todos los modelos transitivos, en particular para L.

Sea $\mathcal{U}$ transitivo, debemos mostrar:

$$\mathcal{U} \models \forall x, y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

Sean $x, y \in U$, supongamos $\forall z \in U(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ y que $x \neq y$, por lo que $x \setminus y \neq \emptyset$, es decir $\exists w \in x \setminus y$, tal que $w \in x$ y $w \notin y$, sin embargo $w \in x \in U$, y U es transitivo, $w \in U$, se sigue $w \in y$, lo cuál es una contradicción.

Par. Sea $x, y \in L$ escogemos α tal que $x, y \in L_\alpha$ (Supongamos que $x \in L_\gamma$, $y \in L_\alpha$, y que $\gamma < \alpha$, por el lema 31 $L_\gamma \subset L_\alpha$, por lo tanto $x, y \in L_\alpha$). Se sigue que $\{x, y\} = \{z | L_\alpha \models \dot{z} = \dot{x} \vee \dot{z} = \dot{y}\} \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$, por lo que el axioma de par se cumple en L.

Unión. Sea $x \in L$. Escogemos α tal que $x \in L_\alpha$. Como L_α es transitivo, $y = \cup x \subseteq L_\alpha$. La fórmula $\phi(v_0) \equiv \exists v_1((v_0 \in v_1) \wedge (v_1 \in \dot{x}))$ define a y como un subconjunto de L en (L_α), por lo que $y \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subseteq L$.

Infinito. Por el lema 31, $\omega \in L_{\omega+1} \subseteq L$. De hecho L contiene a todos los ordinales.

Conjunto Potencia. Sean $x \in L$, $y = \{z | z \subseteq x\}$; este conjunto existe en el universo por el axioma de Potencia, para cada $z \in y$ escogemos $f(z)$ como el menor β tal que $z \in L_\beta$ o $f(z) = \emptyset$ si $z \notin L$. Sea α el supremo de los $f(z)$ para todo $z \in y$, por lo tanto $y \subset L_\alpha$. La fórmula $\phi(v_0) \equiv (\forall v_1)(v_1 \in v_0 \leftrightarrow v_1 \subseteq \dot{x})$ define a y como subconjunto de L_α en L_α, con lo que $y \in L_{\alpha+1}$.

Regularidad. Otra vez recuriendo a que L es transitivo se tiene la regularidad.

Sea $\mathcal{U}$ una clase transitiva, supongamos que $a \in U$, escogemos $b \in V$ tal que $b \in a \wedge b \cap a = \emptyset$, esto se logra ya que en V se cumple el axioma de regularidad. Como $\mathcal{U}$ es transitiva, $b \in \mathcal{U}$, y entonces $\langle \mathcal{U}, \in \rangle \models b \in a \wedge b \cap a = \emptyset$.

Separación. Sean $x \in L$ y $\phi(v_0)$. Se escoge α tal que $x \in L_\alpha$, se debe mostrar que $((\exists y)(y = \{z \in x | \phi(z)\}))^L$. Aplicando el principio de reflexión generalizado (GRP) para la jerarquía L, se puede encontrar $\beta > \alpha$ tal que $(\forall z \in L_\beta)(\phi^{L_\beta}(z) \leftrightarrow \phi^L(z))$. Sea $y = \{z \in x | \phi(z)\}$. Entonces $x \in L_\beta$ y $y \subseteq x \subseteq L_\beta$, por la elección de β, la fórmula $\varphi(v_0) \equiv v_0 \in \dot{x} \wedge \phi(v_0)$ define a y como subconjunto de L_β en L_β y entonces $y \in L_{\beta+1}$.

Remplazo. Suponga que ϕ es una fórmula tal que $((\forall x)(\exists y)\phi(y, x))^L$ y $a \in L$. Se busca $b \in L$ tal que $((\forall x \in a)(\exists y \in b)\phi(y, x))^L$. Tomamos α con $a \in L_\alpha$. Para cada $x \in a$, definimos $f(x) = \beta \geq \alpha$ tal que $(\exists y \in L_\beta)\varphi^L(x, y)$. Sea γ el supremo de todos los $f(x), x \in a$. Así $(\forall x \in a)(\exists y L_\gamma)\phi^L(y, x)$, se sigue que $((\forall x \in a)(\exists y \in L_\gamma)\phi(y, x))^L$, con $b = L_\gamma$ es lo solicitado. Esto completa la demostración del teorema 36.

$\square$

3.2. L y el Axioma de Elección

Hemos mostrado que ZF$\vdash$ ϕ^L para todo axioma ϕ de ZF. A continuación se verificará que ZF$\vdash$AE^L; de esto se sigue que ZF es consistente con el axioma de elección. En efecto, probaremos ZF$\vdash$AE^L de una manera muy fuerte, exhibiendo una $\mathcal{L}$-fórmula la cuál ordena a toda la clase L, podemos entonces escoger de cada conjunto el menor elemento respecto a este orden.

Esta fórmula definirá un buen-orden de L fijando un "orden de construcción" de los miembros de L.

Axioma de Elección (AE). Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de conjuntos no vacios y disjuntos entre sí. Entonces existe un conjunto M que consiste precisamente de un elemento de cada miembro de $\mathcal{F}$. A menudo M es llamado un conjuto elección de $\mathcal{F}$. Se puede probar que AE es equivalente al principio del buen orden.

Ahora en el caso, en el donde $\mathcal{F}$ es finito, la existencia de M no representa ningún problema, se prueba desde los axiomas de ZF. Sin embargo en el caso donde $\mathcal{F}$ es infinito, la existencia de M no puede ser probada desde ZF.

Teorema 37. *(Gödel). Existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\phi(v_0, v_1)$, tal que ZF$\vdash$ $[\{\langle x,y\rangle |\ x,y \in L$ y $\varphi(x,y)\}$ bien ordena $L]$.*

Demostración. Primero que todo se define un buen orden $<_\alpha$ para L_α. Si $\alpha = 0$ no hay nada que definir. Para los otros casos, se fijará una enumeración recursiva.

$\langle \phi_n | n < \omega\rangle$ de todas $\mathcal{L}$-fórmulas con al menos la variable v_0 (y posiblemente otras.)

Caso sucesor. Supongamos que $<_\alpha$ es un buen orden para L_α. Definimos un buen orden $<^*_\alpha$ para las sucesiones finitas de elementos de L_α por $\sigma <^*_\alpha \rho \leftrightarrow$ (longitud $(\sigma) <$ longitud$(\rho)) \vee$ (longitud(σ) =longitud$(\rho) \rightarrow$ (si n es el menor elemento tal que $\sigma(n) \neq \rho(n)$, entonces $\sigma(n) <_\alpha \rho(n))))]$.

Ahora podemos definir un buen orden $<'_\alpha$ para las fórmulas de $\mathcal{L}_{L_\alpha}$ con variable libre v_0 por $\theta(v_0) <'_\alpha \varphi(v_0) \leftrightarrow [n < m$ donde n es el menor natural tal que $\theta(v_0) \equiv \phi_n(v_0, \vec{x})$ para algunos $\vec{x} \in L_\alpha$ y m es menor natural tal que $\varphi \equiv \phi_m(v_0, \vec{y})$ para alguna $\dot{y} \in L_\alpha] \vee [m = n \rightarrow (<^*_\alpha$-menor $(\vec{y})$ tal que $\theta(v_0) = \varphi_n(v_0, \vec{x}) <'_\alpha$-precede a el $<^*_\alpha$-menor $\vec{y}$ tal que $\varphi(v_0) \equiv \phi_n(v_0, \vec{y}))]$.

Finalmente se puede definir $<_{\alpha+1}$ por $x <_{\alpha+1} y \leftrightarrow [x \in L_\alpha \wedge y \in L_\alpha \wedge x <_\alpha y] \vee [x \in L_\alpha \wedge y \notin L_\alpha] \vee [x \notin L_\alpha \wedge y \notin L_\alpha \wedge$ la $<'_\alpha$-menor $\mathcal{L}_{L_\alpha}$-fórmula con una variable libre v_0 la cuál define x en L_α, $<'_\alpha$-precede a la $<'_\alpha$-menor $\mathcal{L}_{L_\alpha}$-fórmula con variable libre v_0 la cuál define y en $L_\alpha]$.

Como $L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$, es claro que esto define un buen orden de $L_{\alpha+1}$.

Caso Límite. Si lím(α) y $<_\beta$ está definido para $(\beta < \alpha)$, definimos $<_\alpha$ por $x <_\alpha y \leftrightarrow [(\exists\beta < \alpha)(x \in L_\beta \wedge y \notin L_\beta)] \vee [(\forall\beta < \alpha)(x \in L_\beta \leftrightarrow y \in L_\beta) \wedge$ si $\beta < \alpha$ es el menor tal que $x, y \in L_\beta$, entonces $x <_\beta y$].

Hasta aquí hemos definido un buen orden para cada L_α. Para $x, y \in L$ definimos $x <_L y$ desde $<_\beta, \beta \in On$ de la misma forma que definimos $<_\alpha$ desde $\beta < \alpha$ para ordinales límite, es decir si $x, y \in L$ definimos $x <_L y \leftrightarrow x <_{L_\alpha} y$, ya que $x, y \in L_\alpha$. Claramente $<_L$ es un buen orden de L. Sea $\phi(v_o, v_1)$ la fórmula obvia aunque complicada la cuál describe a $<_L$, tal que $x <_L y \leftrightarrow \phi^L(x, y)$ para cualquier $x, y \in L$. Sea $\phi(v_0, v_1)$ la $\mathcal{L}$-fórmula la cuál describe la definición de $<_L$, tal que $x <_L y \leftrightarrow \phi^L(x, y)$ para toda $x, y \in L$. □

Teorema 38. *(Gödel). Con(ZF)$\rightarrow_{ZF}$Con(ZFC)*

Demostración. El modelo es L, esto se sigue del teorema 36 y 37.

□

3.3. L visto como un término clase.

En el teorema 37 se definió una fórmula que bien ordena a L, con la condición de que L y cada uno de sus estratos sean expresables en LTC. El objetivo de esta sección será escribir a L de tal suerte que se vea claramente que L es expresable en LTC por medio de una fórmula, y en consecuencia la prueba del teorama 37 estará completa.

Empecemos con un poco de notación; para cualquier conjunto a y $n \in \omega$ escribimos ${}^n a$ para denotar a $\{f | f : n \longrightarrow a\}$ y a ${}^\omega a = \bigcup_{n \in \omega} {}^n a$.

Se define el término clase $Def : V \longrightarrow V$ como:

$$Def(A) = \{X \subset A| \quad X \quad \text{es definible desde A}\}$$

Donde X es definible desde A si existe una fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n, x)$ de LTC y existen elementos $a_1, \ldots, a_n$ de A tal que:

$$X = \{a \in A | \langle A, \in \rangle \models \varphi(a_1, \ldots, a_n, a)\}.$$

Para cada fórmula $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ de LST con variables libres $v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n$ con $n \geq 1$ será asignado un número $m \in \omega$ $(m = [\varphi(v_0, \ldots, v_n)])$.

Se debe construir Def con ayuda de un término clase: $\omega \times V \times V \longrightarrow V$ tal que $\forall m \in \omega \forall a, s \in V G(m, a, s) \subseteq a$ es decir $G(m, a, s) = \{b \in a | \langle a, \in \rangle \models \varphi(s(0), \ldots, s(n-1), b)\}$ si $s \in^\omega a$ y $dom\ s \geq n$ y $\emptyset$ en otro caso.

Entonces se define el término clase $Def : V \longrightarrow V$ por

$$Def(a) = \{G(m,a,s)|m \in \omega, s \in^{\omega} a\}$$

Así $Def(a)$ consiste en todos los conjuntos definibles (con párametros en a) subconjuntos de la estructura $\langle a, \in \rangle$.

Lo que sigue es buscar una manera de asociar a cada fórmula un número natural.

En lo sucesivo, si se dice "$F : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \longrightarrow V$ es Δ_1^{ZF}" pensamos que las clases $U_1, U_2 \ldots U_n$ son Δ_1^{ZF} (i.e. definidas por Δ_1^{ZF}-fórmulas) y que "$F(x_1, \ldots, x_n) = y$" puede ser expresado por una Σ_1-fórmula. Esto garantiza que la extensión $F' : V^n \to V$ de F definida por $F'(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n)$ si $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$ y $\emptyset$ en otro caso, es Δ_1^{ZF} en el sentido dado.

Para dar números a las fórmulas, primero se define $F : \omega^3 \longrightarrow \omega$ por $F(n,m,l) = 2^n 3^m 5^l$. Entonces F es inyectiva y es Δ_1^{ZF}.

Escribimos $[n,m,l]$ para $F(n,m,l)$. Ahora se define $[\phi]$ por recursión sobre ϕ:

$$[v_i = v_j] = [0,i,j]$$

$$[v_i \in v_j] = [1,i,j]$$

$$[\varphi \vee \psi] = [2,[\varphi],[\psi]]$$

$$[\neg\varphi] = [3,[\varphi],[\varphi]]$$

$$[\forall v_i \varphi] = [4,i,[\varphi]]$$

Por supuesto esto no está bien definido en ZF.

Ahora se define el término $Sub : V^4 \longrightarrow V$ por:

$$Sub(a,f,i,c) = \begin{cases} f(c/i) & \text{si } f \in^{\omega} a \wedge c \in a \wedge i \in \omega \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $f \in^{\omega} a$, $c \in a$, e $i \in \omega$ se define dom$(f(c/i))$ =dom(f) y para cada j en el dominio se tiene $f(c/i)(j) = f(j)$, si $i \neq j$, y c en el caso $i = j$.

Además Sub es Δ_1^{ZF}, por el teorema de recursión (teorema 23).

Estamos listos para definir el término clase $Sat : \omega \times V \longrightarrow V$. La idea es que si $m \in \omega$ y m es asociado a una fórmula ϕ de LTC ($m = [\phi(v_0, \ldots, v_{n+1})]$) y $a \in V$, entonces:

$$Sat(m,a) = \{f \in^{<\omega} a | domf \geq n \wedge \langle a, \in \rangle \models \phi(f(0), \ldots, f(n-1))\} \qquad (*)$$

Definición 39. Primero si $a \in V, m \in \omega$ pero m no es de la forma $[i,j,k]$ para algunos $i,j,k \in \omega$ con $i < 5$, entonces $Sat(m,a) = \emptyset$. En otro caso, si $a \in V$ y $m = [i,j,k]$ con $i < 5$, entonces:
$Sat([0,j,k],a) = \{f \in^{<\omega} a | j,k \in dom f \wedge f(j) = f(k)\}$
$Sat([1,j,k],a) = \{f \in^{<\omega} a | j,k \in dom f \wedge f(j) \in f(k)\}$
$Sat([2,j,k],a) = Sat(j,a) \cup Sat(k,a)$
$Sat([3,j,k],a) = ({}^{<\omega}a \setminus Sat(j,a)) \cap \{g \in^{<\omega} a | \exists f \in Sat(j,a) dom f \leq dom\, g\}$
$Sat([4,j,k],a) = \{f \in^{<\omega} a | j \in dom f \wedge \forall x \in a, Sub(a,f,j,x) \in Sat(k,a)\}$
Lo que sigue es verificar que $Sat : \omega \times V \longrightarrow V$ es Δ_1^{ZF}-término clase para eso nos apoyaremos en la versión generalizada del teorema de recursión (sobre ω).

Lema 40. *Suponiendo que $\pi_1, \pi_2, \pi_3 : \omega \longrightarrow \omega$ son Δ_1^{ZF}-término clase, suponga además que $\forall n \in \omega \setminus \{0\}$, $\pi_i(n) < n$ para $i = 1,2,3$, entonces existe un Δ_1^{ZF}-término clase $F : \omega \times V \longrightarrow V$ tal que:*

1. $F(0,a) = 0$
2. $\forall n \in \omega \setminus \{0\}$ $F(n,a) = H(F(\pi_1(n),a), F(\pi_2(n),a), F(\pi_3(n),a), a, n)$.

Se observa que antes con el teorema de recursión definiamos $F(n+1,a)$ en términos de $F(n,a)$, ahora con la versión generalizada definimos $F(n,a)$ en términos de tres valores previos especificos.

Demostración. La demostración es similar al teorema usual de recursión. Primero demostraremos que para $n \in \omega$ existe una función f, con dominio $n+1$ tal que:

1. $F(0,a) = 0$
2. $\forall n \in m \setminus \{0\}$ $F(n,a) = H(F(\pi_1(n),a), F(\pi_2(n),a), F(\pi_3(n),a), a, n)$.

Procedemos por inducción sobre n

Para $n = 0$: Sea $f = \{(0,0)\}$. Entonces f es una función con dominio $\{0\} = 1$, $f(0) = 0$ y $\forall m \in 0 f(m+1) = H(F(\pi_1(m+1),a), F(\pi_2(m+1),a), F(\pi_3(m+1),a), a, m+1)$ esto se cumple trivialmente.

Suponiendolo verdadero para n. Sea f con dominio $n+1$ y satisface (1), (2). Como $\pi_1(n), \pi_2(n), \pi_3(n) \leq n$, *i.e.* están en el dominio de f, se cumple, $f(\pi_1(n+1),a) = x, \quad f(\pi_2(n+1),a) = y \quad f(\pi_3(n+1),a) = z$. Sea $f' = f \cup \{n+1, H(x,y,z,a,n+1)\}$, entonces f' es una función con dominio $n+1 \cup \{n+1\}$, debido a que f' es una extensión de f $f'(0) = f(0) = 0$ (ya que $0 \in n+1$) y si $m \in n+1$ entonces $m \in n$, en cuyo caso $m+1 \in n+1 = \mathrm{dom} f$, por hipótesis de inducción se tiene $f'(m+1) = f(m+1) = H(F(\pi_1(m+1),a), F(\pi_2(m+1),a), F(\pi_3(m+1),a), a, m+1)$ o $m = n$, entonces $f'(m+1) = f'(n+1) = H(x,y,z,a,n+1) = H(F(\pi_1(n+1),a), F(\pi_2(n+1),a), F(\pi_3(n+1),a), a, n+1)$ por lo que el lema es verdadera para $n+1$.

Ahora definimos F mediante:

$F = \{z | \exists x \in \omega \exists y \in V z = \langle x,y\rangle \wedge \exists f (f$ es una función con dominio $x+1$ tal que $f(0,a) = 0 \wedge \forall w \in x \quad f(w+1,a) = H(F(\pi_1(w+1,a)), F(\pi_2(w+1,a)), F(\pi_3(w+1,a))))\}$.

$\square$

Así, la definición de Sat es una aplicación de la versión generalizada del teorema de recursión (lema 40) con $\pi_1(n) = i$ para alguna $j,k < n \quad [i,j,k] = n$ e igual a 0 en otro caso; π_2 y π_3 son definidos similarmente, colocando j y k respectivamente en lugar de i, $H : V^4 \times \omega \longrightarrow V$ definimos de la siguiente manera:

$$H(x,y,z,a,n) = \begin{cases} \{f \in^{<\omega} a : \pi_2(n), \pi_3(n) \in dom f \\ \wedge f(\pi_2(n)) = f(\pi_3(n))\} & \text{si } \pi_1(n) = 0 \\ \\ \{f \in^{<\omega} a : \pi_2(n), \pi_3(n) \in dom f \\ \wedge f(\pi_2(n)) \in f(\pi_3(n))\} & \text{si } \pi_1(n) = 1 \\ \\ y \cup z & \text{si } \pi_1(n) = 2 \\ \\ ({}^{<\omega}a \setminus y) \cap \{g \in^{<\omega} a : \exists f \in y \\ dom f \leq dom g\} & \text{si } \pi_1(n) = 3 \\ \\ \{f \in {}^{<\omega}a : \pi_2(n) \in dom f \wedge \forall x \in a \\ Sub(a,f,\pi_2(n),x) \in z\} & \text{si } \pi_1(n) = 4 \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

F compuesta con H, π_1, π_2, π_3 es Sat. Se observa que H, π_1, π_2, π_3 son Δ_1^{ZF} por lo que por el teorema F es Δ_1^{ZF}. Sat así definida satisface $(*)$.

Antes de definir G debemos introducir un término que toma el $n \in \omega$ más grande tal que "v_n ocurre libre " en la "fórmula codificada por". Denotamos esta n por $\theta(m)$. Definimos primero $F(m)$ (" El conjunto de i tal que v_i ocurre libre en la fórmula codificada por"), como sigue:

$Fr([0,i,j]) = \{i,j\}$
$Fr([1,i,j]) = \{i,j\}$
$Fr([2,i,j]) = Fr(i) \cup Fr(j)$
$Fr([3,i,j]) = Fr(i)$
$Fr([4,i,j]) = Fr(j) \setminus \{i\}$
$Fr(x) = \emptyset$ si no es de la forma anterior.

En ZF $Fr(x)$ es un conjunto finito de números naturales por lo que para todo conjunto x, definimos:

$$\theta(x) = \max(Fr(x))$$

Se observa que θ es Δ_1^{ZF}, pues $\theta(x) = \exists z \in Fr(x)(x \in Fr(x) \to z \geq x)$

Si ϕ es una fórmula de LTC y $m = [\phi]$, entonces $\theta(m)$ es el elemento más grande n tal que V_n ocurre como variable libre en φ, y que si $f \in Sat(m, a)$, para todo $a \in V$, entonces $f \geq 1 + \theta(m)$ (i.e. $0, 1, \ldots, \theta(m) \in \mathrm{dom} f$). Por esta razón definimos $Sat([3, j, k], a)$ de la manera que lo hicimos y no solo para ${}^{<\omega}a \setminus Sat(j, a)$.

Por fin podemos definir G como

$$G(m, a, s) = \begin{cases} \{b \in a : (s \cup \{\theta(m), b\}) \in Sat(m, a)\} & \text{si } s \in^{<\omega} a \text{ y } doms = \theta(m) \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces G es Δ_1^{ZF} (ya que θ, Sat lo son) y cumple las propiedades requeridas.

Por lo tanto

$$Def(a) = \{G(m, a, s) | m \in \omega s \in^{<\omega} a\}$$

es Δ_1^{ZF}.

Corolario 41. *La fórmula $\phi(v_0, v_1)$ que bien ordena a L es absoluta para L.*

3.4. L y La Hipótesis Generalizada del Continuo.

Hasta aquí se ha probado que L es un modelo interno de ZFE, sin embargo L también satisface la Hipotesis Generalizada del Continuo. Para esto se necesitará el Lema de Mostowski, el cuál asegura que para cualquier conjunto X que sea modelos de regularidad existe un único M transitivo tal que X y M son $\in$-isomorfos.

Los cardinales infinitos están bien ordenados. Cantor fue capaz de demostrar que la cardinalidad de $Pot(\omega)$, es la cardinalidad de los reales y ω^ω es $2^{\aleph_0}$, pero no pudo demostrar a que cardinal infinito correspondía $2^{\aleph_0}$. El problema del continuo consiste en determinar el ordinal α tal que $2^\alpha = \aleph_\alpha$. Cantor conjeturó que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, el menor cardinal posible mayor que $\aleph_0$. Esta última igualdad es la forma habitual de formular la hipótesis del continuo (HC). En su versión generalizada es la afirmación:

$$\forall \kappa \geq \aleph_0 [2^\kappa = \kappa^+]$$

Que es conocida como la hipótesis generalizada del continuo (HGC).

Lema 42. *Suponga que X es un conjunto y M_1 y M_2 son conjutos transitivos. Suponga además que $\pi_i : X \longrightarrow M_i$ son $\in$-isomorfismos (i.e $\forall x, y \in X(x \in y \leftrightarrow \pi_i(x) \in \pi_i(y))$), entonces $\pi_1 = \pi_2$ (y por lo tanto $M_1 = M_2$).*

Demostración. Definimos $\phi(x) \leftrightarrow x \notin X \vee \pi_1(x) = \pi_2(x)$. Probaremos $\forall x \phi(x)$ por $\in$-inducción. Suponga que x es cualquier conjunto, y $\phi(y)$ ocurre para toda $y \in x$. Si $x \notin X$ hemos terminado. Supongamos que $x \in X$, y $\pi_1 \neq \pi_2$. Entonces existe z tal que $z \in \pi_1(x)$ y $z \notin \pi_2(x)$. Como M_1 es transitivo y $\pi_1(x) \in M_1$, tenemos que $z \in M_1$, ya que π_1 es sobre, $\exists y$ tal que $\pi_1(y) = z$. Como $\pi_1(y) \in \pi_1(x)$, tenemos $y \in x$ y por lo tanto (por hipótesis de inducción) $z = \pi_1(y) = \pi_2(y)$ y $\pi_2(y) \in \pi_2(x)$. También $z \in \pi_2(x)$ una contradicción. Así, $\phi(x)$ se cumple por el teorema de recursión para ordinales.

□

Teorema 43 (Mostowski.)**.** *Sea X un conjunto tal que $\langle X, \in \rangle \models$Extencionalidad (es decir si $a, b \in X$ y $a \neq b$ entonces $\exists x \in X$ tal que $x \in a \wedge x \notin b$ o vicervesa). Entonces existe un único conjunto transitivo M y una única función π tal que π es un isomorfismo de X a M.*

Demostración. La unicidad se deduce del lema anterior. Para la existencia, probemos por inducción sobre $\alpha \in On$ que existe $\pi_\alpha : X \cap V_\alpha \longrightarrow M_\alpha$ biyectiva para algún conjunto transitivo M_α.

Primero observemos que $\forall \alpha \in On \langle X \cap V_\alpha, \in \rangle \models$Extensionalidad. Como V_α es transitivo por tanto satisface el axioma de extensionalidad. Supongamos que $\exists \alpha \in On \langle X \cap V_\alpha, \in \rangle \not\models$Extensionalidad, es decir sean $x, y \in X \cap V_\alpha$, supongamos que $\forall z \in X \cap V_\alpha (z \in x \leftrightarrow z \in y)$ y que $x \neq y$ por lo que $x - y \neq \emptyset$, es decir $\exists w \in x - y$, o lo que es equivalente $\exists w \in x$ y $w \notin y$, como V_α es transitivo, entonces $w \in V_\alpha$, lo cuál es una contradicción al hecho de que V_α es modelo de extencionalidad.

Para $\alpha = 0$ es trivial.

Caso Límite: Sea β límite, supongamos que π_α, M_α existen para toda $\alpha < \beta$ utilizando el lema anterior estos son únicos. Además $\forall \alpha < \alpha' < \beta M_\alpha \subseteq M_{\alpha'}$ y $\phi_\alpha = \pi_{\alpha'} \upharpoonright M_\alpha$. Por tanto si β es un ordinal límite, tomamos $M_\beta = \cup_{\alpha<\beta} M_\alpha$ y $\pi_\beta = \cup_{\alpha<\beta} \pi_\alpha$.

Caso sucesor: Sea $\beta = \gamma + 1$. Tenemos $\pi_\gamma : X \cap V_\gamma \longrightarrow M_\gamma$. Para $x \in X \cap V_{\gamma+1}$, notemos que $y \in x \cap X \longrightarrow y \in X \cap V_\gamma$, podemos definir:

$$\pi_{\gamma+1}(y) = \{\pi_\gamma(y) | y \in x \cap X\}.$$

Sea $M_{\gamma+1} = \pi_{\gamma+1}[X \cap V_{\gamma+1}]$. Entonces $\pi_{\gamma+1} : X \cap V_{\gamma+1} \longrightarrow M_{\gamma+1}$ es sobre.

Supongamos $a, b \in X \cap V_{\gamma+1}$. Como $\langle X \cap V_{\gamma+1}, \in \rangle \models$Extensionalidad $\exists c \in X \cap V_{\gamma+1}$ tal que $c \in a \wedge c \notin b$.

Entonces $\pi_{\gamma+1}(a) = \{\pi_{\gamma+1}(y)|y \in a \cap X\} \ni \pi_\gamma(c)$. Suponiendo que $\pi_\gamma(c) \in \pi_{\gamma+1}(b)$, entonces $\pi_\gamma(c) = \pi_\gamma(t)$ para algún $t \in b \cap X$. Como $c \in b \cap X$, se tiene que $c \neq t$ contradiciendo el hecho de que π_γ es inyectivo.

Así, $\pi_\gamma(c) \notin \pi_{\gamma+1}(b)$, por lo tanto $\pi_{\gamma+1}(a) \neq \pi_{\gamma+1}(b)$ es decir $\pi_{\gamma+1}$ es inyectivo.

Se verifica ahora que si

$$x \in X \cap V_\gamma (\subseteq X \cap V_{\gamma+1}) \text{ entonces } \pi_\gamma(x) = \pi_{\gamma+1} \qquad (**)$$

Si $y \in \pi_\gamma(x)$, implica $y \in \pi(x) \in M_\gamma$ y por la transitividad de M_γ, $y \in M_\gamma$, por lo tanto $\pi_\gamma(t) = y$ $(t \in X \cap V_\gamma)$.

Entonces $\pi_\gamma(t) \in \pi_\gamma(x)$, ya que $t \in x$ por lo tanto $t \in x \cap X$.

Así $\pi_{\gamma+1} = \{\pi_\gamma(z)|z \in x \cap X\} \ni \pi_\gamma(t) = y$.

Esto muestra que $\pi_\gamma(x) \subseteq \pi_{\gamma+1}(x)$.

Recíprocamente, si $y \in \pi_{\gamma+1}(x)$, Entonces $y = \pi_\gamma(t)$ para algun $t \in x \cap X$. Como $t \in X \in X \cap V_\alpha$, tenemos $\pi_\gamma(t) \in \pi_\gamma(x)$ (ya que π_γ es un isomorfismo). Es decir $y \in \pi_\gamma(x)$, con lo que $\pi_{\gamma+1}(x) \subseteq \pi_\gamma(x)$. Lo que prueba $(**)$.

Si se supone $a, b \in X \cap V_{\gamma+1}$ y $a \in b$ (por lo que $a \in X \cap V_\gamma$), entonces $\pi_{\gamma+1}(b) = \{\pi_\gamma(y)|y \in b \cap X\}$. Pero $a \in b \cap X$, por lo que $\pi_\gamma(a) \in \pi_{\gamma+1}(b)$ y por $(*)$ $\pi_{\gamma+1}(a) \in \pi_{\gamma+1}(b)$.

Finalmente, se compueba la transitividad de $M_{\gamma+1}$. Sea $a \in b \in M_{\gamma+1}$ entonces $b = \pi_{\gamma+1}(x)$ para algún $x \in X \cap V_{\gamma+1}$, por lo que $a = \pi_\gamma(y)$ para algún $y \in x \cap X$. Como $y \in X \cap V_\alpha$, nuevamente por $(*)$ $\pi_\gamma(y) = \pi_{\gamma+1}(y)$, se tiene que $a \in ran\ \pi_{\gamma+1} = M_{\gamma+1}$.

$M = \bigcup_{\alpha \in \gamma+1} M_\alpha$ cumple lo requerido.

□

Teorema 44. *(El Lema de Condensación). Sea α un ordinal límite y supongamos que $X \preceq_1 L_\alpha$ (i.e. $\forall \bar{a} \in X$, $\phi(\bar{v})$ una LTC-fórmula Σ_1, $\langle X, \in \rangle \models \phi(\bar{a})$ si y sólo si $\langle L_\alpha, \in \rangle \models \phi(\bar{a})$). Entonces existen únicos π y β tal que $\beta \leq \alpha$ y $\pi : X \longrightarrow L_\beta$ es un $\in$-isomorfismo. Mas aún si $Y \subseteq X$ y Y es transitivo entonces $\pi(y) = y$ para toda $y \in Y$*

Demostración. Supondremos cierto el teorema. La demostración se dará más adelante.

□

El lema de condensación y el Teorema de Löwenheim-Skolem nos ayudarán a probar la hipótesis Generalizada del Continuo en L:

Teorema 45. *(ZF+V=L)Sea κ un cardinal y supongamos que x es un subconjunto acotado de κ. Entonces $x \in L_\kappa$.*

Demostración. Inmediato si $\kappa \leq \omega$ pues si $\kappa = n+1$ con $n \in \omega$ y $x \subset n+1$, entonces x es finito digamos $x = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, y sabiendo que $a_1, a_2, ...a_m \in L_n$, se tiene que $x \in L_{n+1}$. Por lo que se supone $\kappa > \omega$; debido a que x es acotado en κ, se tiene $x \subseteq L_\alpha$ para algún $\omega \leq \alpha \leq \kappa$. Observemos que $L_\alpha \cup \{x\}$ es transitivo, pues si $y \in z \in L_\alpha$, se tiene por la transitividad de L_α que $z \in y$, si $y \in x$, entonces $y \in L_\alpha$ pues $x \subseteq L_\alpha$

Usando $V = L$, sea λ un ordinal límite tal que $\lambda \geq \kappa$, entonces $L_\alpha \cup \{x\} \subseteq L_\lambda$. Usando el teorema de Löwenheim-Skolem y tomando $A = L_\lambda$ y $Y = L_\alpha \cup \{x\}$, existe X tal que $L_\alpha \cup \{x\} \subseteq X$ y $X \preceq L_\lambda$ con $|X| = |L_\alpha \cup \{x\}| = |\alpha|$. Utilizando el lema de condensación existen $\pi : X \simeq L_\beta$ es un $\in$-isomorfismo, entonces $|\beta| = |L_\beta| = |X| = |\alpha|$, por lo que $\beta < \kappa$, y como $L_\alpha \cup \{x\}$ es transitivo nuevamente por el Lema de Condensación $\pi(x) = x$, es decir $x \in L_\beta \subseteq L_\kappa$.

□

Corolario 46. *Si $x \subseteq \kappa$ entonces $x \in L_{\kappa^+}$.*

Demostración. Si $x \subseteq \kappa$, entonces $x \subseteq \kappa^+$ acotado, por anterior se tiene $x \in \kappa^+$. □

Corolario 47. *$ZF + V = L \vdash HGC$, es decir si ZF es consistente también lo es $ZF + HGC$*

Demostración. Por el lema anterior $ZF + V = L \vdash$ ”para todo ordinal infinito κ, $Pot(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$”, pues si $x \subseteq \kappa$, x es un subconjunto acotado de κ^+, por el lema anterior $x \in L_{\kappa^+}$. Pero $ZF \vdash$ ”para todo ordinal infinito κ, $|L_{\kappa^+}| = \kappa^+$” por lo que $ZF + V = L \vdash$ ”para todo ordinal infinito κ, $|P(\kappa)| \leq \kappa^+$”, es decir $2^\kappa \leq \kappa^+$, la otra desigualdad $\geq$ siempre ocurre. □

En este capítulo se ha demostrado que L satisface tanto el Axioma de elección como el de la Hipótesis Generalizada del Continuo, aunque la demostración del segundo esta sujeta a el Lema de Condensación que no se ha probado, y en realidad para probar el Lema de Condesación necesitamos una construcción más cuidadosa de L, que nos permita asegurar no sólo que L es Σ_1 si no también cada estrato L_α es Σ_1.

Capítulo 4

Funciones primitivo recursivas

4.1. Introducción

En el capítulo anterior se construyó L de una manera intuitiva con la finalidad de verificar que es un modelo de ZF y también del Axioma de Elección y de la Hipótesis generalizada de Continuo, para la segunda se utilizó el Lema de Condensación, que no ha sido demostrado. El Lema de Condensación garantiza que para un ordinal límite α y $X \preceq_{\Sigma_1} L_\alpha$, entonces en realidad X se comporta como un estrato L_β con $\beta < \alpha$; así, nos vemos en la necesidad de examinar la complejidad de la fórmula que define la construcción iterada. Para esto es conveniente comenzar con el estudio de una clase particular de funciones, la clase de las funciones primitivo recursivas.

Las funciones recursivas en los naturales se pueden generalizar a funciones primitivas en los ordinales, en realidad se generalizan estas funciones para cualquier conjunto (no solamente ordinales). La manera más fácil es considerar funciones como la función sucesor, adición,multiplicación, etc.

Definición 48. Una función $f : V^n \to V$ es primitivo recursiva (p.r.) si es generada por el siguiente esquema:

i) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ con $1 \leq i \leq n$

ii) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{x_i, x_j\}$ con $1 \leq i, j, \leq n$.

iii) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i - x_j$ con $1 \leq i, j, \leq n$.

iv) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

v) $f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigcup_{z \in y} g(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

vi) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \omega$.

vii) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(y, (x_1, x_2, \ldots, x_n), \langle f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) | z \in h(z) \rangle)$ donde $z \in h(y) \to rn(z) < rn(y)$.

El esquema (vii) es conocido como el teorema de recursión; si $f : V^n \to V$ es generado por (i)-(v) solamente, es llamada rudimentaria (rud).

Definición 49. Se dice que una relación $R \subseteq V^n$ es p.r. (respectivamente rud) si existe una función p.r. (respectivamente rud) $f : V^n \longrightarrow V$ tal que $R = \{\langle \vec{x} \rangle | f(\vec{x}) \neq \emptyset\}$.

Note que un caso particular del esquema (vii) en la definición 48, ocurre cuando $h = id$. Aquí en particular, rn (recordemos que el $rn(x)$ es el rango de x, y se define como el menor ordinal α tal que $x \in V_{\alpha+1}$) es una función p.r. A modo de ejemplo tenemos que las siguientes funciones son p.r.

Lema 50. *Las siguientes funciones y relaciones son rud y por lo tanto p.r:*

1) La función id (identidad) por esquema (i).

2) $f(x) = \bigcup x$, pues $f(x) = \bigcup_{z \in x} id(x) = \bigcup x$ usando esquema (v) y 1 se concluye que es rud.

3) $f(x,y) = x \bigcup y$ ya que $f_1(x,y) = \{x,y\}$ es rud por (ii), $f_2(z) = \bigcup z$ es rud por anterior, por lo que $f(x,y) = f_2(f_1(x,y)) = \cup\{x,y\} = x \cup y$ es rud.

4) $f(x_1,\ldots,x_n) = \{x_1,\ldots,x_n\}$, utilizando (ii) $g(x_1,\ldots,x_n) = \{x_n\}$ e rud; supongamos que $f_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) = \{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$ es rud, $h(x,y)$ es rud por (3), por lo tanto $f(x_1,\ldots,x_{n+1}) = h(f_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n+1},x_n), g(x_1,\ldots,g_n)) = \{x_1,\ldots x_{n+1}\} \bigcup \{x_n\} = \{x_1,\ldots,x_n\}$.

5.) $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n)$, por definición $(x_1,\ldots,x_n) = \{\{x_1\},\{x_1,(x_2,\ldots,x_n)\}\}$. Definimos $f_0(x_1,\ldots,x_n) = \{x_1\}$, por inducción sobre n. Supongamos

$$f_{n-1}(x_2,\ldots,x_n) = x_1,\ldots,x_n$$

Por lo que definimos:

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \{x_1,(x_2,\ldots,x_n)\}$$

la cuál resulta ser rud, y por lo tanto

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \{f_0(x_1,\ldots,x_n), g(x_1,\ldots,x_n)\} = \{\{x_1\},\{x_1,(x_1,\ldots,x_n)\}\}$$

es rud.

6.) $f_m(x_1,\ldots,x_n) = m$ para cada $m \in \omega$, pues nuevamente por inducción sobre m, $f_0(x_1,\ldots,x_n) = 0 = x_i - x_i$ es rud, supongamos que $f_m(x_1,\ldots,x_n) = m$ es rud, entonces $f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n) = m+1 = \{0,1,\ldots,m\}$ por lo que es rud.

7.) Las relaciones $(x \in y)$ y $(x \neq y)$ son rud, se observa que $(x \notin y) \leftrightarrow \{x\} - y \neq \emptyset$. Por los incisos anteriores $f_1(x,y) = \{x\} - y$ es rud y además $f_1(x,y) \neq \emptyset \leftrightarrow x \notin y$, análogamente tenemos que $f_2(x,y) = (x-y) \cup (y-x)$ es rud y $f_2(x,y) \neq \emptyset \leftrightarrow x \notin y$.

8.) $f(y,\vec{x})$ es rud, también lo es la función $g(y,\vec{x}) = (f(z,\vec{x})|z \in y)$. Utilizando el esquema (v) junto con resultados previos y la identidad tenemos

$$g(y,\vec{x}) = \cup_{z\in y}\{(f(z,\vec{x}),z)\}$$

9.) f, R son rud (respectivamente p.r.) también lo es

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \text{si } R(\vec{x}) \\ \emptyset, & \text{si } \neg R(\vec{x}) \end{cases}$$

Demostración. $g(\vec{x}) = \bigcup_{y\in r(\vec{x})} f(\vec{x})$ donde $R(\vec{x}) \leftrightarrow r(\vec{x}) \neq \emptyset$. Primero veamos que $g(\vec{x}) = \bigcup\limits_{y\in r(\vec{x})} f(\vec{x}), \bigcup\limits_{y\in r(\vec{x})} f(\vec{x}) = g(\vec{x})$. Si $\neg R(\vec{x})$ entonces $r(\vec{x}) = \emptyset$ por lo que $\bigcup\limits_{y\in r(\vec{x})} f(\vec{x}) = \emptyset = g(\vec{x})$. Ahora veamos que $\bigcup\limits_{y\in r(\vec{x})} f(\vec{x})$ es rud. Definimos $h_0(r(\vec{x}), f(\vec{x})) = f(\vec{x})$ es rud ya que r, f son rud y se aplica (iv). $h(r(\vec{x}), x) = \bigcup\limits_{z\in r(x)} h_0(r(\vec{x}), f(\vec{x})) = \bigcup\limits_{z\in r(\vec{x})} f(\vec{x})$ es rud por (v).

□

10.) Sea χ_R la función característica de R. Entonces R es rud (respectivamente p.r.) si y sólo si χ_R lo es.

Demostración. Primero supongamos que R es rud entonces existe $r(\vec{x})$ tal que $R(\vec{x}) \to r(\vec{x}) \neq \emptyset$, por el inciso (6): $f(\vec{x}) = 1$, es rud por lo que:

$$\chi_R = g(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } R(\vec{x}) \\ \emptyset, & \text{si } \neg R(\vec{x}), \end{cases}$$

es rud. Ahora supongamos que χ_R es rud, entonces:

$$\chi_R = \begin{cases} 1, & \text{si } R(\vec{x}) \\ \emptyset, & \text{si } \neg R(\vec{x}) \end{cases}$$

Tomamos a $r(\vec{x}) = 1$, por lo que $R(\vec{x})$ es rud. □

11.) R es rud (respectivamente p.r.) si y sólo si $\neg R$ lo es.

Demostración. Primero supongamos que R es rud, por (10) χ_R es rud, por lo tanto $h(\vec{x}) = 1 - \chi_R(\vec{x})$ es rud y además $\neg R(\vec{x}) \leftrightarrow 1 - \chi_R(\vec{x}) \neq \emptyset$. Ahora supongamos que $\neg R$ es rud por (10) $\chi_{\neg R}$ es rud, definiendo $h(\vec{x}) = 1 - \chi_R(\vec{x})$ se ve que R es rud. □

12.) Sean $f_i : V^n \to V$ rud (respectivamente p.r.) para $i = 1, \dots m$ y $R_i \subseteq V^n$ rud (respectivamente p.r.) $i = 1, \dots, m$ tal que $i \neq j \to R_i \cap R_j = \emptyset$ y $\bigcup_{1 \leq i \leq m} R_i = V^n$. Definimos $f : V^n \to V$ por $[f(\vec{x}) = f_i(\vec{x})] \leftrightarrow R_i(\vec{x})$, entonces f es rud (respectivamente p.r.)

Demostración. Definimos:

$$\bar{f}(\vec{x}) = \begin{cases} f_i(\vec{x}), & \text{si } R_i(\vec{x}) \\ \emptyset, & \text{si } \neg R_i(\vec{x}) \end{cases}$$

Por (9) cada $\bar{f}_i$ es rud (respectivamente p.r.), definimos $f(\vec{x}) = \bigcup_{1 \leq i \leq m_i} \bar{f}_i(\vec{x})$ y por (11) es rud. □

13.) Si $R(y, \vec{x})$ es rud (respectivamente p.r.) entonces también lo es $f(y, \vec{x}) = y \cap \{z | R(z, \vec{x})\}$.

Demostración. Se hace:

$$h(y, \vec{x}) = \begin{cases} \{y\} & \text{si } R(y, \vec{x}) \\ \emptyset, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por (1) h es rud (respectivamente p.r.). Se define $f(y, \vec{x}) = \cup_{z \in y} h(z, \vec{x})$ es rud por (v). □

14.) Suponga $R(y, \vec{x})$ es rud (respectivamente p.r.) y que $(\forall \vec{x})(\exists! y) R(x, \vec{y})$. Hagamos:

$$f(y, \vec{x}) = \begin{cases} \text{como } z \in y \text{ tal que } R(z, \vec{x}), \text{ si } (\exists z \in y) R(z, \vec{x}) \\ \emptyset, \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. $f(y, \vec{x}) = \cup [y \cap \{z | R(z, \vec{x})\}]$, por (5) $[y \cap \{z | R(z, \vec{x})\}]$ es rud. □

15.) Si $R(y, \vec{x})$ es rud (respectivamante p.r.), también lo es $(\exists z \in y) R(z, \vec{x})$.

Demostración. Sea r rud (respectivamente p.r.) tal que $R(y, \vec{x}) \leftrightarrow r(y, \vec{x}) \neq \emptyset$; entonces $(\exists z \in y) R(z, \vec{x}) \leftrightarrow \cup_{z \in y} r(z, \vec{x}) \neq \emptyset$. Supongamos que $(\exists z \in y) R(z, \vec{x})$ entonces $r(z, \vec{x})$, por lo que $\bigcup_{z \in y} r(z, \vec{x}) \neq \emptyset$. Si $\bigcup_{z \in y} r(z, \vec{x}) \neq \emptyset$ por lo tanto $R(z, \vec{x})$. Veamos que $\bigcup_{z \in y} r(z, \vec{x})$ es rud (respectivamente p.r.):

$$h(z, \vec{x}) = \begin{cases} r(z, \vec{x}) & \text{si } R(z, \vec{x}) \\ \emptyset, & \text{si } \neg R(z, \vec{x}) \end{cases}$$

Se tiene que $f(y, \vec{x}) = \cup_{z \in h} h(z, \vec{x})$ es rud por (v). □

16.) La función $f(x) = \cap x$ es rud.

Demostración. Veamos que $f(x) = (\cup x) \cap \{z | (\forall y \in x)(z \in y)\}$ es rud: $\neg(\forall y \in x)(z \in y) \equiv \exists y \in x \neg(z \in y)$ es rud, por lo tanto $\forall y \in y (z \in y)$ es rud, ya se ha probado que $\cup x$ es rud y finalmente usando (5), $f(x)$ es rud.

□

17.) La función $f(x, y) = x \bigcap y$ es rud (respectivamente p.r.).

Pues escribamos $f(x,y) = \{x,y\}$ y utilizando (16) tenemos que $\cap\{x,y\}$ es rud.

18.) Suponga $R_i(\vec{x}), i = 1,\ldots,m$ son rud (respectivamente p.r.), entonces también lo es $\bigcup_{1\leq i\leq m} R_i$ y $\bigcap_{1\leq i\leq m} R_i$.

Demostración.
$$\bigcup_{1\leq i\leq m} R_i \leftrightarrow r_i(\vec{x})\bigcup,\ldots,\bigcup r_m(\vec{x}) \neq \emptyset$$
$$\bigcap_{1\leq i\leq m} R_i \leftrightarrow r_i(\vec{x})\bigcap,\ldots,\bigcap r_m(\vec{x}) \neq \emptyset,$$
donde $r_i(\vec{x})\bigcup,\ldots,\bigcup r_m(\vec{x})$, $r_i(\vec{x})\bigcap,\ldots,\bigcap r_m(\vec{x})$ son rud utilizando (2) y (17). □

19.) Definimos:
$$x(y) = \begin{cases} z \in \cup\bigcup x & \text{tal que } \langle z,y\rangle \in x \\ \emptyset, & \text{si tal } z \text{ no existe} \end{cases}$$

Entonces $f(x,y) = x(y)$ por resultados previos es rud.

20.) dom y ran son rud y por lo tanto p.r.

Pues escribimos $\mathrm{dom}(x) = \{z \in \cup\bigcup x | (\exists w \in \cup\bigcup x)(\langle w,z\rangle \in x)\}$ análogamente para la relación ran.

21.) $x\times y$ es rud. Pues se escribe $x\times y = \bigcup_{u\in x}\bigcup_{v\in y}\{\langle u,v\rangle\}$.

22.) $x \restriction y$ es rud. Pues se escribe $x \restriction y = x\bigcap(\mathrm{ran}(x)\times y)$.

El siguiente paso es mostrar que los predicado rudimentarios son justamente los predicados que son Σ_0^{ZF}. Para esto, es conveniente definir un nuevo tipo de funciones. Sea $f : V^n \to V$; f es simple si y sólo si, siempre que $\phi(z,\vec{y})$ es una Σ_0^{ZF}-fórmula, existe una Σ_0 $\mathcal{L}_0$-fórmula ψ tal que $ZF \vdash [\phi(f(\vec{x}),\vec{y}) \leftrightarrow \psi(\vec{x},\vec{y})]$. Se observa que si f,g son simples, también lo es su composición, pues trabajando en ZF sea ϕ una Σ_0-fórmula, se tiene $\phi(f\circ g(\vec{x}),\vec{y}) \leftrightarrow \phi(f(g(\vec{x})),\vec{x})) \leftrightarrow \psi(g(\vec{x}),\vec{y})$ ya que f es simple, y por lo tanto $\psi(g(\vec{x}),\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x},\vec{y})$ ya que g es simple.

Lema 51. *$f : V^n \to V$ es simple si y sólo si:*

i.) *El predicado $x \in f(\vec{x})$ es Σ_0^{ZF} y*

ii.) *Siempre que $A(z)$ es Σ_0^{ZF} entonces también lo es $(\forall x \in f(\vec{y})A(x))$.*

Demostración. Si f es simple, la fórmula $\phi(y,z) \equiv z \in y$ es Σ_0, por lo tanto $\phi(f(\vec{x}),z) \equiv z \in f(\vec{x})$ es equivalente en ZF a una Σ_0-fórmula, es decir $z \in f(\vec{x})$ es Σ_0^{ZF}; supongamos que $A(z)$ es Σ_0^{ZF}. La fórmula $\phi(y) \equiv (\forall x \in f(\vec{y}))A(x)$ es equivalente a una fórmula Σ_0 en ZF, por lo que $\forall x \in f(\vec{y})A(x)$ es Σ_0^{ZF}.

Por otro lado sea $f : V^n \to V$ una función tal que cumple (i) y (ii) mostraremos por inducción sobre la constucción de la fórmula ϕ que f es simple:

a) $\phi(z,y) \equiv y \in z \to \phi(f(\vec{x}),y) \equiv y \in f(\vec{x})$ es Σ_0^{ZF} por (i).

b) $\phi(z,y) \equiv z = y$ es decir $\phi(z,y) \equiv \forall a \in z(a \in y) \wedge \forall a \in y(a \in z)$,por lo tanto $\phi(f(\vec{x}),y) \equiv \forall a \in f(\vec{x})(a \in y) \wedge \forall, a \in y(a \in z)$ es Σ_0^{ZF}, por (i) $a \in f(\vec{x})$ es Σ_0^{ZF}, por (ii) $\forall a \in f(\vec{x})(a \in y)$ es Σ_0^{ZF}, por lo que $\phi(f(\vec{x}),y)$ es Σ_0^{ZF}.

c) $\phi(z,\vec{x}) \equiv \psi_1(z,\vec{y}) \wedge \psi_2(z,\vec{y})$, entonces $\phi(f(\vec{x}),\vec{x}) \equiv \psi_1(f(\vec{x}),\vec{y}) \wedge \psi_2(f(\vec{x}),\vec{y})$ es Σ_0^{ZF}, ya que por hipótesis de inducción $\psi_1(f(\vec{x}),\vec{y})$ y $\psi_2(f(\vec{x}),\vec{y})$ son Σ_0^{ZF}, y por definición de las fórmulas Σ_0.

d) $\phi(x,\vec{y}) \equiv \neg\psi(x,\vec{y})$, $\phi(f(\vec{x}),\vec{y}) \equiv \psi(f(\vec{x}),\vec{y})$ es Σ_0^{ZF}, por las mismas razones.

e) $\phi(z,\vec{y}) \equiv \forall u \in z\psi(\vec{y})$, $\phi(f(\vec{x}),\vec{y}) \equiv u \in f(\vec{x})\psi(\vec{y})$, por hipótesis de Inducción $\psi(\vec{y})$ es Σ_0^{ZF}, aplicando (ii) tenemos que $\phi(f(\vec{x}),\vec{y})$ es Σ_0^{ZF}.

□

Lema 52. *Si f es rud, entonces f es simple.*

Demostración. Sea $\phi(x,\vec{y})$ una Σ_0-fórmula, Supongamos que f es rud; procedemos por inducción en la construcción de f:

i) $f(x_1,\ldots,x_n) \equiv x_i$, es decir $f(x_1,\ldots,x_n) = y \leftrightarrow y = x_1$

  a) $x \in f(\vec{x}) \leftrightarrow x \in x_i$ es Σ_0.

  b) Siempre que $A(z)$ es Σ_0 entonces $(\forall x \in x_i)A(x)$, también lo es

ii) $f(x_1,\ldots,x_n) = \{x_i,x_j\}$ con $1 \leq i,j \leq n$, es decir $f(x_1,\ldots,x_n) = y \leftrightarrow \forall a \in y(a = x_i \vee a = x_j)$.

  a) $x \in f(\vec{x}) \leftrightarrow (x = x_i \vee x = x_j)$ es Σ_0

  b) Siempre que $A(z)$ es Σ_0^{ZF} entonces $\forall x \in f(\vec{x})A(x) = (A(x_i) \wedge A(x_j))$.

iii) $f(\vec{x}) = x_i - x_j$, reescribiendo se tiene $f(\vec{x}) = y \leftrightarrow \forall a \in y(a \in x_i \wedge a \notin x_j)$.

  a) $x \in f(\vec{x}) \leftrightarrow x \in x_i \wedge x \notin x_j$ es Σ_0.

  b) Siempre que $A(z)$ es Σ_0^{ZF} entonces $(\forall x \in f(\vec{x}))(A(x)) \equiv \forall x \in x_i(a \notin x_j \to A(x)))$ es Σ_0

iv) $f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}),\ldots,g_k(\vec{x}))$. Supongamos que $h, g_1,\ldots,g_k$ son simples.

  a) $x \in f(\vec{x}) \equiv x \in h(g_i(\vec{x}),\ldots,g_k(\vec{x}))$. Como h es simple, si $\psi(x,y) \equiv y \in x$, tenemos $\psi(h(\vec{z}),y) \equiv y \in h(\vec{z})$ es Σ_0, por lo que $x \in h(g_i,\ldots,g_n)$ es Σ_0^{ZF}.

  b) Si $A(z)$ es Σ_0, entonces lo es también $\forall x \in \vec{y}A(z)$, pues por hipóteis de inducción $\forall x \in h(\vec{y})A(z)$ es Σ_0.

v) $f(y,\vec{x}) = \bigcup_{z\in y} g(z,\vec{x})$. Supongamos que g es simple, entonces $f(y,\vec{x}) = k \leftrightarrow \forall a \in k \exists z \in y(a \in g(z,\vec{x}))$.

a) $x \in \bigcup_{z\in y} g(z,\vec{x} \equiv \exists z \in y(x \in g(z,x))$, como g es simple, entonces $x \in g(z,x)$ es Σ_0 de donde $\exists z \in y(x \in g(z,x))$ es Σ_0.

b) Supongamos que $A(r)$ es Σ_0, $(\forall r \in f(\vec{x})A(r)) \equiv \forall z \in y(r \in g(z,x) \to A(r))$, como g es simple, se tiene que $r \in g(z,x)$ es Σ_0, lo cuál prueba que $\forall z \in y(r \in g(z,x) \to A(r))$ es Σ_0

□

Lema 53. *$R \subseteq V^n$ es Σ_0^{ZF} si y sólo si es rud.*

Demostración. Si R es Σ_0^{ZF}, digamos definida por ϕ veamos que R es rud por inducción en la definición de ϕ

a) $\phi(x,y) \equiv x \in y$ es rud (ya probado en el lema 50)

b) $\phi(x,y) \equiv x = y$ es rud (ya probado en el lema 50)

c) $\phi(x,y) \equiv \neg\psi(\vec{x})$, supongamos que ψ es rud, hemos probado en el lema 50 que $\neg\psi(\vec{x})$ es rud.

d) $\phi(x,y) \equiv \phi_1(\vec{x}) \wedge \phi_2(\vec{x})$, supongamos que $\phi_1(\vec{x})$ y $\phi_2(\vec{x})$ son rud, entonces $R = \{\vec{x}|\phi(\vec{x})\} = \{\vec{x}|\phi_1(\vec{x})\}\bigcap\{\vec{x}|\phi_2(\vec{x})\}$ y por el lema 50 la intersección es rud.

Ahora si χ_R es rud, por inducción en la construcción de χ_R

i) $\chi_R(\vec{x}) = x_i$, es decir $\chi_r(\vec{x}) \equiv y \leftrightarrow y = x_i$ es Σ_0^{ZF}.

ii) $\chi_R(\vec{x}) = \{x_i, x_j\}$ rescribiendo tenemos $\chi_R(\vec{x}) \equiv y \leftrightarrow (y = x_i \vee y = x_j))$ es Σ_0^{ZF}.

iii) $\chi_R(\vec{x}) = x_i - x_j$, es decir $\chi_R(\vec{x}) \equiv y \leftrightarrow \forall x \in x_i(x \in x_j)$ es Σ_0^{ZF}.

iv) $\chi_R(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_k(\vec{x}))$, suponemos que $h, g_1, \ldots, g_2$ satisfacen el lema, como $g_1, \ldots, g_n$ son Σ_0, por el lema anterior se tiene que $g_1, \ldots, g_n$, son simples, como h está definida por una Σ_0-fórmula, digamos $\phi(\bar{x})$, entonces existe una fórmula $\psi(g_1, \ldots, g_n)$ equivalente a ϕ, la cuál es Σ_0.

v) $\chi_R(y,\vec{x}) = \cup_{z\in y} g(z,\vec{x})$, podemos reescribirla de la siguiente manera: $\chi_R(y,\bar{x}) = v \leftrightarrow \forall w \in v \exists z \in y(v \in g(z,\bar{x}))$, la cuál es Σ_0, pues por hipóteis $g(z,\bar{x})$ es Σ_0 para $z \in y$.

□

Corolario 54. i.) *Si $R \subseteq V^n$ es Σ_0^{ZF} entonces R es p.r.*

ii.) *Si $R \subseteq V^n$ es p.r. entonces R es Σ_1^{ZF}.*

Demostración. **i)** Supongamos que R es Σ_0^{ZF} por anterior es rud, entonces es p.r.

ii) Es una consecuencia del lema de estabilidad que más adelante se probará.

□

Lema 55. *Las funciones $\alpha+1$, $\alpha+2$, $\alpha\cdot\beta$, α^β son p.r.*

Demostración. $\alpha + 0 = \alpha$

$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ la cuál es rud, pues se probó en el teorema 21(18), que es Δ_0^{ZF}, y usando el lema anterior concluimos que es rud, por lo tanto es p.r.

$\alpha + (\beta+1) = (\alpha+\beta)+1$

$\alpha + \beta = \sup_{\gamma<\beta} \alpha + \beta$.

Esto demuestra que podemos definir $\alpha+\beta$ por recursión primitiva.

$\alpha \cdot 0 = 0$.

$\alpha \cdot (\beta+1) = (\alpha\cdot\beta)+\alpha$.

$\alpha \cdot \beta = \sup_{\gamma<\beta} \alpha\cdot\beta$.

De igual forma forma $\alpha\cdot\beta$ lo podemos definir por recursión primitiva.

Análogamente para α^β.

□

Lema 56. *Sea $f(y,\vec{x})$ una función p.r. Se define $g(\nu,y,\vec{x}) = f^\nu(y,\vec{x})$, donde $f^0(x,\vec{x}) = y$, $f^{\nu+1}(y,\vec{x}) = f(f^\nu(y,\vec{x}),\vec{x})$, $f^\lambda(y,\vec{x}) = \cup_{\nu<\lambda} f^\nu(x,\vec{x})$ si $lim(\lambda)$. Entonces g es p.r.*

Demostración.

$$g(\nu,y,\bar{x}) = \begin{cases} y & \text{si } \nu = 0 \\ f(g(\beta,y,\bar{x})) & \text{si } \nu = \beta+1 \\ \cup_{\beta<\nu} g(\beta, y\bar{x}) & \text{si } lim(\nu). \end{cases}$$

□

Definición 57. Para cualquier conjunto a, existe un único conjunto b, denotado por $TC(a)$ y llamado la clausura transitiva de a, tal que:

1. $a \subseteq b$
2. b es transitivo.
3. Siempre que $a \subseteq c$ y c es transitivo, entonces $b \subseteq c$.

Demostración. Para la unicidad, supongamos que $a \subseteq b_1$ y $a \subseteq b_2$, ambos transitivos y tales que satisfecen (3), entonces $b_1 \subseteq b_2$ y $b_2 \subseteq b_1$, por lo que $b_1 = b_2$.

Para la existencia la idea es hacer $b = a \cup \bigcup a \cup \bigcup\bigcup a \cup ...$, lo que se formaliza en el siguiente lema. □

Lema 58. *TC es primitivo recursivo*

Demostración. Sean a un conjunto y G el término clase dado por:

1.$F(0) = a$, y

2. $\forall n \in \omega F(n+1) = G(F(n)) = \bigcup F(n)$.

Por remplazo existe $B = \{y|\exists x \in \omega F(x) = y\}$. Sea $b = \bigcup B = \bigcup\{F(n)|n \in \omega\}$, el cuál es p.r. Probemos ahora que b es la clausura transitiva de a.

1. Como $a = F(0)$ y $F(0) \in B$, tenemos que $a \in B$, por lo que $a \subseteq \bigcup B = b$.

2. Supongamos que $x \in b$ y $y \in x$, entonces $x \in \bigcup B$, implica que $x \in F(n)$ para alguna $n \in \omega$, es decir $x \subseteq \bigcup F(n)$, se sigue $y \in \bigcup F(n)$, por lo que $y \in F(n+1)$, entonces $y \in \bigcup B = b$.

3. Supongamos que $a \subseteq c$ y c es transitivo.

   Se probará por inducción que $F(n) \subseteq c$.

   $F(0) = a \subseteq c$, por hipótesis.

   Supongamos que $F(n) \subseteq c$ y que $x \in F(n+1)$, es decir $x \in \bigcup F(n)$, entonces para alguna $y \in F(n)$, $x \in y$. Así $x \in y \in F(n) \subseteq c$, entonces $x \in y \in c$, y debido a la transitividad de c, se concluye que $x \in c$.

   Así, hemos probado por inducción que $\forall n \in \omega F(n) \subseteq c$, por lo que $\bigcup\{F(n) : n \in \omega\} \subseteq c$, es decir $b \subseteq c$ (respectivamente rud).

Por lo tanto $G(a) = TC(a)$.

□

Una clase U es llamada p.r. cerrada (repectivamente rud cerrada) si y solo si $f''U^n \subseteq U$ para cualquier función f p.r.

Lema 59. *Supongamos que U una clase p.r. cerrada (respectivamente rud) y transitiva. Sea $f : V^n \to V$ p.r. (respectivamente rud) definida por el esquema de funciones p.r. (respectivamente rud) $g_0, \ldots, g_p$. Entonces la misma sucesión relativizada a U define $f \upharpoonright U^n$. Más generalmente esto pasa para cualquier clase transitiva U que sea cerrada respecto $g_0, \ldots, g_p$.*

Demostración. Se sigue de que las g_i son primitivo recursivo cerradas (respectivamente rud) y de que U es p.r. cerrada (respectivamente rud). □

Recordemos que π es el colapso de Mostowski y que $\pi : U \cong W$, donde W es transitivo, está definido como $\pi(x) = \{\pi(y)|y \in x\}$. Observemos que:

- $\{\pi(z)|z \in \{x\}\} = \{\{\pi(z)|z \in x\}\}$, pues si $a \in \{\pi(z)|z \in \{x\}\}$, se tiene que $a = \pi(x) = \{\pi(z)|z \in x\} \in \{\{\pi(z)|z \in x\}\}$; para la otra contención tomemos $a \in \{\{\pi(z)|z \in x\}\}$, es decir $a = \{\pi(z)|z \in x\}$, es decir $a = \pi(x)$, por lo que $a \in \{\pi(z)|z \in \{x\}\}$.

- $\pi(x_1, x_2) = (\pi(x_1), \pi(x_2))$. Sea $w \in \pi(x_1, x_2)$, entonces existe un $y \in (x_1, x_2)$ tal que $\pi(y) = w$. Sin embargo que $y \in (x_1, x_2)$ quiere decir que $y \in \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$, es decir $y = \{x_1\}$ o $y = \{x_1, x_2\}$. Si $y \in y = \{x_1\}$, entonces $\pi(y) = \{\pi(z)|z \in x_1\}$, es decir $y = \pi(\{x_1\})$ usando lo anterior concluimos $y \in \{\{\{\pi(y)|y \in x_1\}\}, \{\{\pi(y)|y \in x_1\}, \{\pi(y)|y \in x_2\}\}\} = (\pi(x_1, x_2))$. Aálogamente si suponemos que $y = \{x_1, x_2\}$, y para la otra contención.

  De aquí podemos concluir que $\pi(x_i, \ldots, x_n) = (\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))$, pues por inducción se tiene que $\pi(x_i, x_2) = (\pi(x_1), \pi(x_2))$ ya probado. Ahora supongamos que $\pi(x_i, \ldots, x_n) = (\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))$, queremos ver que $\pi(x_i, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n), \pi(x_{n+1}))$, pero para esto solo necesitamos la definición de n-ada ordena, $(x_i, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ((x_i, \ldots, x_n), x_{n+1})$, aplicando la base de inducción se tiene $\pi(x_i, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n), \pi(x_{n+1}))$.

Lema 60. *Sean U es p.r. cerrada (respectivamente rud), y $\pi : U \cong W$, donde W es transitivo. Entonces para cualquier función f p.r. $\pi(f(\vec{x})) = f(\pi(\vec{x}))$ para todo $\vec{x} \in U$. Más generalmente, esto pasa para cualquer U que es cerrada bajo las funciones p.r. que definen el esquema de f.*

Demostración. **i)** $\pi(f(x_1, \ldots, x_n)) = \pi(x_i)$, por otro lado tenemos que

$$f(\pi(x_1, \ldots, x_n)) = f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_2)) = \pi(x_i)$$

.

ii) $\pi(f(x_1, \ldots, x_n)) = \pi(\{x_i, x_j\})$, por otro lado $f(\pi(x_1, \ldots, x_n)) = f(\pi(x_i), \pi(x_j)) = \{\pi(x_i), \pi(x_j)\}$, probemos que es igual a $\pi(\{x_i, x_j\})$. Sea $z \in \pi(\{x_i, x_j\})$, entonces $z = \pi(x_i) \vee z = \pi(x_2)$, por lo que $z \in \{\pi(x_i), \pi(x_j)\}$. Sea $z \in \{\pi(x_i), \pi(x_j)\}$, entonces $z = \pi(x_i) \vee z = \pi(x_j)$, es decir $z = \pi(y)$ con $y \in \{x_i, x_j\}$, es decir $z \in \pi(\{x_i, x_j\})$.

iii) $\pi(f(x_1, \ldots, x_n)) = \pi(\{x_i, x_j\})$, por otro lado

$$f(\pi(x_1, \ldots, x_n)) = f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)) = \pi(x_i) - \pi(x_j)$$
$$= \{\pi(y)|y \in x_i\} - \{\pi(y)|y \in x_j\} = \{\pi(y)|y \in x_i \wedge y \notin x_j\} = \pi(x_i - x_j).$$

iv) $(f(x_1, \ldots, x_n)) = h(g_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots g_k(x_1, \ldots, x_n))$, es decir debemos probar que

$$\pi(h(g_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots g_k(x_1, \ldots, x_n))) = h(g_1(\pi(x_1, \ldots, x_n)) \ldots g_k(\pi(x_1, \ldots, x_n))),$$

y supongamos que h, g_1, g_k satisfacen el teorema, entonces por hipótesis de inducción:

$$\pi(h(g_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots g_k(x_1, \ldots, x_n))) = h(\pi(g_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots g_k(x_1, \ldots, x_n))) \text{ y}$$
$$\pi(g_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots g_k(x_1, \ldots, x_n)) = (\pi(g_1(x_1, \ldots, x_n)) \ldots \pi(g_k(x_1, \ldots, x_n)))$$

por lo que

$$h(\pi(g_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots g_k(x_1, \ldots, x_n))) = h(\pi(g_1(x_1, \ldots, x_n)) \ldots \pi(g_k(x_1, \ldots, x_n))) =$$
$$h(g_1(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)) \ldots (g_k(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))).$$

v) $f(y,x_1,\ldots,x_n)=\bigcup_{z\in y} g(z,x_1,\ldots,x_n)$. Supongamos que $g(z,x_1,\ldots,x_n)$ satisface el lema; debemos probar que

$$\pi(\bigcup_{z\in y} g(z,x_1,\ldots,x_n)) = \bigcup_{z\in\pi(y)} g(z,\pi(x_1),\ldots\pi(x_n))$$

Basta mostrar que $\pi(\bigcup A)=\bigcup\pi(A)$: Sea $x\in\pi(\bigcup A)=\{\pi(y)|y\in\bigcup A\}$, es decir $x\in\pi(\bigcup A)\leftrightarrow\exists w\in A$ tal que $y\in w\wedge\pi(y)=x\leftrightarrow\pi(y)\in\pi(A)$ por lo que $x\in\bigcup\pi(A)$. La otra contención es análoga.

$$\pi(\bigcup_{z\in y} g(z,x_1,\ldots,x_n)) = \pi(\bigcup\{g(z,x_1,\ldots,x_n)|z\in y\}=)$$

$$\bigcup\pi(\{g(z,x_1,\ldots,x_n)|z\in y\}) = \bigcup_{z\in y}\pi(g(z,x_1,\ldots,x_n)) =$$

$$\bigcup_{z\in y} g(\pi(z),\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n))) \text{ por hipótesis de inducción.}$$

vi) $\pi(f(x_1,...,x_n))=\omega$, esto ocurre pues ω es transitivo.

vii $f(y,x_1,\ldots,x_n)=g(y,(x_1,\ldots,x_n),\langle f(z,x_1,\ldots,x_n)|z\in h(z)\rangle)$, donde $z\in h(y)\rightarrow rn(z)<rn(y)$. Debemos probar:

$$\pi(g(y,(x_1,\ldots,x_n),\langle f(z,x_1,\ldots,x_n)|z\in h(z)\rangle)) =$$

$$g(\pi(y),(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n)),\langle f(\pi(z),\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n))|\pi(z)\in h(z)\rangle)$$

Por hipótesis de inducción se tiene:

$$\pi(g(y,(x_1,\ldots,x_n),\langle f(z,x_1,\ldots,x_n)|z\in h(z)\rangle)) =$$
$$g(\pi(y),(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n)),\pi(\langle f(z,x_1,\ldots,x_n)|z\in h(z)\rangle))$$
$$g(\pi(y),(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n)),(\langle f(\pi(z),\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n))|\pi(z)\in h(z)\rangle))$$

.

□

Lema 61. *Sean X una clase, y U su clausura p.r. cerrada (esto es la menor clase p.r cerrada que contiene a X) y $\pi: U\cong W$ donde W es transitivo. Si $\pi\restriction X = Id\restriction X$, entonces $\pi = Id\restriction U$.*

Demostración. Se puede ver a $U=\{f(\vec{x})|\vec{x}\in X \text{y } f \text{ p.r.}\}$, pues $U\subseteq\{f(\vec{x})|\vec{x}\in X\text{y } f\text{ p.r.}\}$ debido a que $x=id(x)$ es p.r, Para la otra contención tomemos $y\in\{f(\vec{x})|\vec{x}\in X\text{y } f\text{ p.r.}\}$, entonces $y=f(x)$ para alguna f p.r y $x\in U$, y como U es cerrado bajo funciones p.r. tenemos que $f(x)\in U$, es decir $y\in U$.

Sea $y\in U$, por lo anterior podemos ver a y como $f(x)$ para alguna f p.r. y $x\in X$, por el lema 60, se tiene $\pi(f(\vec{x}))=f(\pi(\vec{x}))=f(\vec{x})=id\restriction U$. □

En este momento se ha completado la discución sobre el conjunto de funciones p.r. Ahora es el turno de estudiar la complejidad lógica del predicado de satisfacción.

4.2. Aritmetización de $\mathcal{L}_V$. Semántica de $\mathcal{L}_V$

En esta sección se pretende con ayuda de las funciones p.r. investigar la noción de satisfacción de primer orden y, en concecuencia, la definición de L, empezando con una definición formal del "lenguaje". Definimos:

Variables $v_n = (0, n)$ con $n \in \omega$.

El predicado $\mathrm{vbl}(v_0) \equiv$ "v_0 es una variable" es Σ_0^{ZF}, pues $\mathrm{vbl}(v_0) \leftrightarrow \exists n \in \omega(v_n = (0, n))$.

Constantes $\dot{x} = (1, x), x \in V$.

El predicado $\mathrm{const}(v_0) \equiv$ "v_0 es una constante " es nuevamente Σ_0^{ZF}: $\mathrm{const}(v_0) \leftrightarrow \exists x \in \mathrm{TC}(v_0)(v = (1, x))$.

fórmulas primitivas: $x \in y = (2, (x, y))$ donde $x, y \in \mathrm{vbl} \bigcup \mathrm{const}$.

$x = y = (3, (x, y))$ donde $x, y \in \mathrm{vbl} \bigcup \mathrm{const}$.

El predicado $\mathrm{PFml}(v_0) =$ "v_0 es una fórmula primitiva " es Σ_0^{ZF}, ya que $\mathrm{PFml}(v_0) \leftrightarrow \exists x, y \in \mathrm{Tc}(v_0)(v_0) = (2, (x, y)) \vee v_0 = (3, (x, y))$

La demás fórmulas se definen por recursión: $\phi \wedge \psi = (4, (\phi, \psi))$

$\phi \vee \psi = (5, (\phi, \psi))$

$\phi \rightarrow \psi = (6, (\phi, \psi))$

$\phi \leftrightarrow \psi = (7, (\phi, \psi))$

$\neg\phi = (8, \phi)$

$\forall\phi = (9, (u, \phi)), u \in \mathrm{vbl}$

$\exists\phi = (10, (u, \phi)), u \in \mathrm{vbl}$

$$\forall u \in v\phi = (11, (u, v, \phi)) \text{ tal que } \begin{cases} u, v \in \mathrm{vbl} & u \neq v \\ u \in \mathrm{vbl}\ v \in \mathrm{const}. & \end{cases}$$

$$\exists u \in v\phi = (12, (u, v, \phi)) \text{ tal que } \begin{cases} u, v \in \mathrm{vbl} & u \neq v \\ u \in \mathrm{vbl}\ v \in \mathrm{const}. & \end{cases}$$

La clase de fórmulas de $\mathcal{L}_V$ es la cerradura de PFml bajo las operaciones anteriores.

Vamos a demostrar que el predicado $\mathrm{Fml}(v_0) \equiv$ "v_0 es una fórmula" es p.r.

Observación 62. Las funciones $\mathrm{vbl}(u)$=$\mathrm{vbl}_u = \{v_i | i \in \omega\}$ y $\mathrm{const}(u)$=$\mathrm{const}_u = \{\dot{x} | x \in u\}$ son primitivo recursivas.

Demostración. **i)** $\mathrm{vbl}_u = \{v_i | i \in \omega\}$: $g(n, u) = \{(0, n)\}$, $k(u) = \omega$ se tiene $\mathrm{vbl}_u = h(k(u), u) = \bigcup\limits_{n \in k(u)} g(n, u) = \bigcup\limits_{m \in \omega} \{(0, n)\}$.

ii) $\mathrm{const}_u = \{\dot{x} | x \in u\}$: $g(x) = \{(1, x)\}$, análogamente $\mathrm{const}_u = h(k(u), u)$

$$= \bigcup_{n \in k(u)} g(n, u) = \bigcup_{m \in \omega} \{(0, n)\}.$$

□

Observación 63. Sea $\mathrm{PFml}_u = \{t_i \in t_2 | t_1, t_2 \in \mathrm{vbl}_u \cup \mathrm{const}_u\} \bigcup \{t_i = t_2 | t_1, t_2 \in \mathrm{vbl}_u \cup \mathrm{const}_u\}$. La función PFml_u es p.r. como función de u.

Demostración. Sean $k(u) = \text{vbl}(u) \bigcup \text{const}(u)$
$g_1(t_1, t_2) = \{t_1 \in t_2\}$
$g_2(t_1, t_2) = \{t_1 = t_2\}$
$f_1(u) = h(k(u), t_2) = \bigcup_{t_1 \in k(u)} g_1(t_1, t_2)$
$f_2(u) = h(k(u), t_2) = \bigcup_{t_2 \in k(u)} g_1(t_1, t_2)$
$f_3(u) = h(k(u), t_2) = \bigcup_{t_1 \in k(u)} g_2(t_1, t_2)$
$f_4(u) = h(k(u), t_2) = \bigcup_{t_2 \in k(u)} g_2(t_1, t_2)$
Por lo que $\text{PFml}_u = (f_1 \cup f_2) \bigcup (f_3 \cup f_4)$ es p.r.

□

Observación 64. const$= \bigcup_u \text{const}_u$ y $\text{const}(x) \leftrightarrow x \in \text{const}_{TC(x)}$.

Demostración. **i)** Si que $x \in \text{const}_{TC(x)}$, entonces $x = \dot{z}$ con $z \in TC(x)$ por lo que $z \in V$ y por lo tanto $\dot{z} \in$const.

ii) Por otro lado si $x \in$const, $x = \dot{z} = (1, z)$ pero $z \in TC(x)$ por lo que $\dot{z} \in \text{const}_{TC(x)}$ es decir $x \in \text{const}_{TC(x)}$.

□

De la misma manera se tiene:

Observación 65. PFml$= \bigcup_u \text{PFml}_u$ y $\text{PFml}(x) \leftrightarrow x \in \text{PFml}TC(x)$.

Demostración. **i)** Si $x \in \text{PFml}_{TC(x)}$ entonces $x \equiv t_1 \in t_2$ o $x \equiv t_1 = t_2$ con $t_1, t_2 \in \text{vbl}_{TC(x)} \bigcup \text{const}_{TC(x)}$ por lo que $x \in$PFml.

ii) Ahora supongamos $x \in$PFml, entonces $x \equiv t_1 \in t_2$ o $x \equiv t_1 = t_2$ con $t_1, t_2 \in \text{vbl} \bigcup \text{const}$. Si $t_1, t_2 \in \text{vbl}$ entonces $t_i \in \text{vbl}_{TC(t_i)} \subseteq \text{vbl}_{TC(x)}$, análogamente para los otros casos, por lo que $x \in \text{PFml}TC(x)$.

□

Nuestro siguiente paso es mostrar que *Fml* es p.r.

Definición 66. Sea $F(v, u) = \{x \wedge y | x, y \in v\} \cup \{x \vee y | x, y \in v\} \cup \{\neg x | x \in v\} \cup \{x \rightarrow y | x, y \in v\} \cup \{(\forall x) y | x \in \text{vbl}_u, y \in v\} \cup \{(\exists x) y | x \in \text{vbl}_u, y \in v\} \cup \{(\forall x \in z) y | x \in \text{vbl}_u, y \in v, z \in \text{vbl}_u \cup \text{const}_u - \{x\}\} \cup \{(\exists x \in z) y | x \in \text{vbl}_u, y \in v, z \in \text{vbl}_u \cup \text{const}_u - \{x\}\}$.

Se escribe Fml_u^ν cuando se refiera a $F^\nu(\text{PFml}, u)$. En particular se tiene $\text{Fml}_u = \text{Fml}_u^\omega$, por lo que Fml es p.r.

Observación 67. Fml$= \bigcup_u \text{Fml}_u$ y $\text{Fml}(x) \leftrightarrow x \in \text{Fml}_{TC(x)}$.

Demostración. **i)** Suponiendo que $x \in \text{Fml}_{TC(x)}$, entonces $x \in \text{Fml}^m_{TC(x)}$. Si $m = 0$, $x \in F(\text{PFml}_{TC(x)}, Tc(x))$, por lo que x es una fórmula. Si $m = n + 1$, entonces $x \in F^{n+1}(\text{PFml}_{TC(x)}, Tc(x))$, por hipótesis de inducción $x \in F^n(\text{PFml}_{TC(x)}, Tc(x))$ son fórmulas por lo que x es una fórmula.

ii) Ahora si $x \in$Fml, entonces x es una fórmula, la demostración es por inducción sobre la construcción de x, la base de inducción ha sido probada en la observación 65, a modo de ejemplo se mostrará para $x \equiv \forall z\phi$, suponiendo que $\phi \in \mathrm{Fml}_{TC(\phi)}$; como $TC(\phi) \subseteq TC(x)$, se tiene $\phi \in \mathrm{Fml}_{TC(x)}$, por definición $x \in \mathrm{Fml}_{TC(x)}$.

□

Lema 68. *Se define*

$$Fr(\phi) = \begin{cases} \text{El conjunto de variables libres en } \phi, & \text{si } Fml(\phi) \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Fr es definible por recursión.

Demostración. $\mathrm{Fr}(\phi) = G(\phi, \langle \mathrm{Fr}(x) | x \in Tc(x) \rangle)$ donde G es p.r. por lo que $\mathrm{Fr}(\phi)$ es p.r.

$$G(x,y) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \neg \mathrm{Fml}(x) \\ \emptyset & \text{si } x \equiv t_1 = t_2 : \mathrm{const}(t_1) \wedge \mathrm{const}(t_2) \\ \emptyset & \text{si } x \equiv t_1 \in t_2 : \mathrm{const}(t_1) \wedge \mathrm{const}(t_2) \\ \{t_1\} & \text{si } x \equiv t_1 = t_2 : \mathrm{vbl}(t_1) \wedge \ \mathrm{const}(t_2) \\ \{t_2\} & \text{si } x \equiv t_1 = t_2 : \mathrm{const}(t_1) \wedge \ \mathrm{vbl}(t_2) \\ \{t_1, t_2\} & \text{si } x \equiv t_1 = t_2 \vee x \equiv t_1 \in t_2 : \mathrm{vbl}(t_1) \wedge \ \mathrm{vbl}(t_2) \\ \mathrm{Fr}(x_1) \cup \mathrm{Fr}(x_2) & x \equiv x_1 \wedge x_2 \vee x \equiv x_1 \vee x_2 \\ \mathrm{Fr}(x_1) - \{y\} & \text{si } x \equiv \forall y x_1 \vee \exists y x_1. \end{cases}$$

□

Si ϕ es una fórmula, x es una variable,y t es una constante, $\phi(x/t)$ denota el resultado de remplazar cada ocurrecincia libre de x en ϕ por t.

Lema 69. *Se define*

$$Sub(\phi, x, t) = \begin{cases} \phi(x/t), & \text{si } Fml(\phi),\ vbl(x)\ const(t) \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sub es definible por recursión.

Pues $\mathrm{Sub}(\phi, \vec{z}) = G(\phi, \vec{z}, \langle \mathrm{Sub}, y, z | y \in TC(\phi) \rangle)$, donde G es p.r. por lo que sub lo es también:

$$G(x,y,\vec{z}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \neg \mathrm{Fml}(x) \\ t_1 = t_2 & \text{si } x \equiv t_1 = t_2 :\ \mathrm{const}(t_1)\text{y const}(t_2) \\ t_1 = y & \text{si } x \equiv t_1 = t :\ \mathrm{const}(t_1) \text{ y vbl}(t) \\ y = y & \text{si } x \equiv t_1 = t_2 :\ \mathrm{vbl}(t_1) \text{ y vbl}(t_2) \\ t_1 = t_2 & \text{si } x \equiv t_1 = t_2 :\ \mathrm{const}(t_1)\text{y const}(t_2) \\ t_1 \in t_2 & \text{si } x \equiv t_1 \in t_2 :\ \mathrm{const}(t_1)\text{y const}(t_2) \\ t_1 \in y & \text{si } x \equiv t_1 \in t_2 :\ \mathrm{const}(t_1) \text{ y vbl}(t_2) \\ y = t_2 & \text{si } x \equiv t_1 \in t_2 :\ \mathrm{vbl}(t_1)\text{y const}(t_2) \\ \mathrm{Sub}(z) & \text{si } x \equiv \neg z :\ \mathrm{Fml}(z) \\ \mathrm{Sub}(z_1)\mathrm{Sub}(z_2) & \text{si } x \equiv z_1 \wedge z_2 \ \mathrm{Fml}(z_1) \text{ y Fml}(z) \\ \forall y \mathrm{Sub}(z) & \text{si } x \equiv \forall w z(t) :\ \mathrm{Fml}(z)\text{y vbl}(w) \\ \exists y \mathrm{Sub}(z) & \text{si } x \equiv \exists w z(t) :\ \mathrm{Fml}(z)\text{y vbl}(w). \end{cases}$$

Formalmente la notación $\models_u \phi$ significa que ϕ es un enunciado de $\mathcal{L}_u$ el cuál es verdadero en $\langle u, \in\rangle$ bajo la interpretación obvia como miembros de const_u.

Note que la función que envia $x \in \text{const}_u$ a $x \in u$ es p.r. ($x \in \text{const}_u$ entonces $x = \dot{z} = (1, z)$ es decir $f(\dot{z}) = z$ es p.r.)

Lema 70. *La función $f(u) = \{\phi | \models_u \phi\}$ es p.r.*

Demostración. Definiendo $\bar{f}(\nu, u) = \{\phi \in \text{Fml}_u^\nu | \models_u \phi\}$. Como $f(u) = \bar{f}(\omega, u)$ es suficiente probar que $\bar{f}$ es p.r. Sea $g(u) = \{\phi \in \text{Fml}_u | \text{Fr}(\phi) = \emptyset \text{ y}\}$, por los lemas anteriores g es p.r. Haciendo $h(v, w) = v \cup \{\phi \wedge \psi | \phi, \psi \in v\} \cup \ldots \cup \{\forall x\phi | (\forall y \in w)[\phi(x/\dot{y}) \in v]\} \cup \{\forall x \in \dot{z}\phi | (\forall y \in w \cap z)[\phi(x/\dot{y}) \in v]\} \cup \ldots$ h es p.r. Finalmente $\bar{f}(\nu, u) = h^\nu(g(u), u)$, por lo que $\bar{f}$ es p.r. $\square$

Similarmente, $f(u) = \{\phi | \models_u^{\sigma_0} \phi\}$ es p.r.

Lema 71. *La función Def es p.r.*

Demostración. Definiendo h por $h(u, \phi) = \{x \in u | \models_u \phi(v_0/\dot{x})\}$. Tomando f como en el lema anterior $h(u, \phi) = u \cap \{x | \text{Sub}(\phi, v_0, \dot{x}) \in f(u)\}$ por lo que h es p.r. observando $Def(u) = h''(\{u\} \times \text{Fml}_u)$ la prueba esta concluida. $\square$

Para completar nuestro análisis de $\mathcal{L}_V$ y su semántica se estudiará la jerarquía construible a detalle.

4.3. La Jerarquía Construible

Lema 72. *$\langle L_\nu | \nu \in On\rangle$ es p.r.*

Demostración. Se puede observar que si g es p.r. entonces la siguiente función también lo es.

$$H(\nu, u, z) = \begin{cases} u & \text{si } \nu = 0 \\ g(z(\beta + 1)) & \text{si } \nu = \beta + 1 \\ \cup_{\beta<\omega} z(\beta) & \text{si } lim(\beta). \end{cases}$$

Haciendo $L_\nu = Def^\nu(\emptyset)$ queda demostrado el lema.

$\square$

Corolario 73. *"$y = L_x$" es Δ_1^{ZF}.*

Demostración. Recordemos que si f es una función y el $\text{dom}(f)$ es Π_1^{ZF}, entonces f y el $\text{dom}(f)$ son Δ_1^{ZF}. L_x es p.r. por lo que es Σ_1^{ZF}, solo restaría mostrar que On es Π_1^{ZF}:

$On \equiv Trans(x)(\forall y \in x)(\forall z \in y)(y \in z \vee z \in y \vee y = z)$ donde

$Trans(x) \equiv (\forall y \in x)(\forall z \in y)(z \in y)$ por lo que On es Σ_0^{ZF}. $\square$

Corolario 74. *El predicado "x es construible"(i.e. $x \in L$) es Σ_1^{ZF}.*

Demostración. $x \in L \leftrightarrow (\exists\alpha)[On(\alpha) \wedge x \in L_\alpha]$. $\square$

Corolario 75. *Sean M un modelo transitivo de ZF y $\alpha \in On \cap M$. Entonces $L_\alpha \in M$ y $L_\alpha = L_\alpha^M$ y por lo tanto $L \subseteq M$.*

Demostración. Por el corolario 73, el predicado $y = L_x$ es absoluto para M, y sabiendo que $M \models ZF$, se tiene que $\alpha \in M \to (L_\alpha^M) \in M$. □

Corolario 76. *Para toda $\alpha \in On$, $(L_\alpha)^L = L_\alpha$ por lo que $(L)^L = L$.*

Demostración. L es un modelo interno, por lo que es transitivo y contiene a todos los ordinales, es decir $L_\alpha = (L_\alpha)^L\ \forall\alpha \in On$, por lo que $L = \bigcup L_\alpha = \bigcup (L_\alpha)^L = L^L$. □

Corolario 77. *Para todo $\alpha \in On$ infinito $\langle L_\nu | \nu < \alpha \rangle$ es Δ_1^{ZF}.*

Demostración. L_α es evidentemente cerrada bajo la función $\langle L_\nu | \nu < \alpha \rangle$ esto es por que $\nu < \alpha$, $L_\nu \subset L_\alpha$ por el lema 59 esto es la restricción a α de una función p.r y por lo tanto es Σ_1^{ZF}. □

4.4. El Lema de Estabilidad

Llamamos a un ordinal α p.r. cerrado si y sólo si $f : \alpha^m \to \alpha$ para toda función $f : On^m \to On$ p.r.

En el siguiente resultado intentamos caracterizar la clase de los ordinales p.r. cerrados, para esto definimos una sucesión de funciones $a_n : On \to On$: $a_0(\alpha) = \alpha + 1$ $a_{n+1}(\alpha) = a_n^{\alpha+2}(\alpha)$

En la teoría ordinaria de recursión a_n restringida a ω se le conoce como la n-ésima rama de Ackerman; siendo esta p.r observemos que no utiliza el esquema (vi). Definimos a $a =< a_n | n, m >$ conocida como la función de Ackerman.

Observación 78. a_n es estrictamente monótona.

Demostración. Por inducción sobre n

i) Si $n = 0$, entonces a_0 es la función sucesor que es estrictamente monótona.

ii) Supongamos que $n = m + 1$ y que $\alpha < \beta$:

$$a_{m+1}(\alpha) = a_m^{\alpha+2}(\alpha) < a_m^{\alpha+2}(\beta) = a_{m+1}(\beta)$$

por lo que a_n es estrictamente monótona.

□

Observación 79. $\alpha < a_0(\alpha) < a_1(\alpha), \ldots, a_n(\alpha) < ...$ para $\alpha \in On$

Demostración. Por inducción sobre n

i) $\alpha < a_0(\alpha)$ por definición.

ii) Supongamos que $n = m + 1$:

$$a_{n+1}(\alpha) = a_n^{\alpha+2} > a_m^{\alpha+2} = a_n(a_n^{\alpha+1}(\alpha)) > a_n(\alpha)$$

$\square$

Lema 80. *Definimos* $|x_i, \ldots, x_m| = max(rn(x_i), \ldots, rn(x_m))$. *Si* f *es p.r. sin usar* ω *como constante, entonces existe un* n *tal que:*

$$|f(\vec{x})| < a_n(\vec{x}) \text{ para toda } (\bar{x}).$$

Demostración. Este lema se demuestra por inducción sobre la construcción de f. Para este propósito es conveniente remplazar el esquema:

vii) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(y, (x_1, x_2, \ldots, x_n), \langle f(z, x_1, x_2, \cdot, x_n) | z \in h(z)) \rangle$ donde $z \in h(y) \to rn(z) < rn(y)$ por el esquema:

vii') $k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g((x_1, x_2, \ldots, x_n), \bigcup_{z \in y} k(z, \vec{x}))$

Que vii') es suficiente puede ser mostrado como sigue: Sea $k(y, x) = h(y, x, \langle f(y, x) | z \in y \rangle)$. Haciendo $\bar{k}(y, x) = \{\langle k(y, x), x, y \rangle\}$. Entonces $\bar{k}$ es definible por recursión.

$$\bar{k}(y, x) = \{\langle h(y, x, \cup_{z \in y} \bar{k}(z, x)), x, y \rangle\} = g'(y, x, \cup_{z \in y} \bar{k}(z, y)).$$

Remplazando la primera coordenada "y" en el lado derecho por

$$\text{"dom}(\cup_{z \in y})\bar{f}(z, x)\text{" ya que } \cup_{z \in y} \bar{f}(z, x) = y$$

Se llega a la ecuación:

$$\bar{k} = g(x, \cup_{z \in y} \bar{f}(z, x))$$

Que es primitivo recursiva por esquema v).

Por lo que $f(x, y)$ es p.r:

$$g_1(x, y) = \cup \bar{f}(x, y) = \langle f(x, y), x, y \rangle \text{ es p.r.}$$

$$g_2(x, y, z) = x \text{ es p.r por lo que:}$$

$$g_2 \circ g_1(x, y) = g_2(\langle f(x, y), x, y \rangle) = f(x, y) \text{ es p.r.}$$

Empecemos la demostración por inducción en la construcción de f:

i) $f(\vec{x}) = x_i$: $|x_i| \leq |\vec{x}| \leq a_0(|\vec{x}|)$ por lo que $|x_i| < a_0(|\vec{x}|)$.

ii) $f(\vec{x}) = \{x_i, x_j\}$; si $|x, y| = \alpha$, entonces $|\{x_i, x_j\}| = \alpha + 1$, $|x, y| < a_0(|x, y|)$ $< a_0(a_0(|x, y|))$, por lo que $\alpha + 1 < a_0(|x, y|) = a_1(|x, y|)$, entonces $f(\vec{x}) = a_1(|x, y|)$.

iii) $f(\vec{x}) = x_i - x_j$. Supongamos que $|x_i, x_j| = \alpha$ entonces $|x_i - x_j| = \alpha$ así que $f(\vec{x}) < a_0(\vec{x})$.

iv) $f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \ldots, g_n(\vec{x})$. Para cada $g_1(\vec{x})$ con $1 \leq i \leq n$ tenemos $a_i(\vec{x})$ con $0 \leq i \leq n$ tal que $|g(\vec{x})| < a_i(\vec{x})$ y para $|f(\vec{x})|$ tenemos $a_k(\vec{x})$. Sea $N = max\{\{i|1 \leq i \leq n\}, k\}$ por lo que $a_N(\vec{x}) > g_1(\vec{x})$ para $1 \leq i \leq n$ y $a_A(\vec{x}) > f(\vec{x})$ de donde se sigue:

$$|f(\vec{x})| = |h(g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \ldots, g_n(\vec{x}))| < a_N(|g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \ldots, g_n(\vec{x})|)$$

$$a_N(a_N(\vec{x})) = a_N^2(\vec{x}) < a_N^{|x|+2}(\vec{x}) = a_{N+1}(\vec{x}).$$

v) $f(y, \vec{x}) = \cup_{z \in y} g(z, \vec{x})$. Sea $a_n(|z|, \vec{x}) > |g(z, \vec{x})|$. Por lo tanto, $|f(y, \vec{x})| < a_{n+1}(|z, \vec{x}|)$.

vii) $f(y, \vec{x}) = g(y, \vec{x}, < f(z, \vec{x})|z \in y >)$ el cual remplazamos por:

$$f(y, \vec{x}) = g(x, \cup_{z \in y} f(z, \vec{x})).$$

Probemos primero por inducción sobre y la suguiente afirmación:

$$|f(y, \vec{x})| < a_n^{|y|+1}(\vec{x}).$$

Sin pérdida de generalidad se puede pensar que $\vec{x} = x$. Suponiendo que esto pasa para $z \in y$, tenemos:

$$|f(y, x) = |g(x, \cup_{z \in y}) f(z, x)| < a_n(|x, \cup_{z \in y} f(z, x)|) \leq a_n(||x|, sup_{\nu < |y|} a_n^{\nu+1}(|x|)|) =$$

$$a_n^{|y|+1}(|x|).$$

Lo que demuestra la afirmación.

Así:

$$|f(y, x)| < a_n^{|y|+1}|x| \leq a_N^{|y,x|+1}(|y, x|) < a_n^{|y,x|+2}(|y, x|) = a_{n+1}(|y, x|).$$

□

De este lema se sige el siguiente corolario:

Corolario 81. **a)** *α es p.r. cerrado si y solo si α es cerrado bajo las ramas de Ackerman.*

b) *V_α es p.r. cerrado si y solo si α es p.r. cerrado.*

Demostración. a) Supongamos que α es p.r. cerrado; como las ramas de Ackerman son p.r. entonces α es cerrado bajo las ramas de Ackerman.

Supongamos que que α es cerrado bajo las ramas de Ackerman y supongamos que existe una función p.r. f tal que $f[\alpha] \nsubseteq \alpha$. Por el lema 80 existe una n tal que $f(\beta) < a_n(\beta) < a_n(\alpha)\ \forall \beta < \alpha$.

b) Por el lema 80 basta demostrarlo sólo para las ramas de Ackerman. Supongamos que V_n es p.r. cerrado, y supongamos que α no es p.r. cerrado, existe una rama de Ackerman a_n y $\beta \in \alpha$ tal que $a_n(\beta) \notin \alpha$, por lo que $\alpha \leq a_n(\beta)$; es decir, $a_n(\beta) \notin V_\alpha$ pues $V_\alpha \cap On = \alpha$, lo cual contradice el hecho de que V_α es p.r. cerrado.

Ahora supongamos que α es p.r. cerrado y que V_α es p.r. cerrado y que V_α no es cerrado, digamos respecto a a_n, entonces existe $x \in V_\alpha$ tal que $a_n(|x|) \notin V_\alpha$, es decir, $\alpha \leq a_n(|x|)$ contradiciendo el hecho de que α es p.r. cerrado. □

En este momento estamos listos para probar el Lema de Estabilidad.

Lema 82. ***Estabilidad***. *Si f es p.r. entonces existe una Σ_0-fórmula $\varphi_f(z, y, \bar{x})$ (la cual contiene sólo a ω como constante) y una función p.r cerrada normal $\bar{f} : On \to On$ (Una "función"normal $h : On \to On$ es aquella tal que es estrictamente creciente y para culaquier ordinal límite γ se cumple $h(\gamma) = \sup_{\zeta<\gamma} h(\zeta)$) tales que:*

a) *$y = f(\vec{x})$ si y solo si $\exists z \vDash \varphi(z, y, \vec{x})$.*

b) *Si u es transitivo, $\vec{x} \in L_{\bar{f}(\alpha)}$ y $|\vec{x}| < \bar{f}(\alpha)$ entonces:*

- **i)** *$f(\vec{x}) \in L_{\bar{f}(\alpha)}$.*
- **ii)** *$y = f(\vec{x})$ si y sólo si $\exists z \in L_{\bar{f}(\alpha)} \vDash \varphi(z, y, \vec{x})$.*

Demostración. El Lema de Estabilidad se prueba por inducción sobre en la construcción de f.

i) $f(\vec{x}) = x_i$, $1 \leq i \leq n$ es una Σ_0-fórmula pues $f(\vec{x}) = z \leftrightarrow z = x_i$, es decir $y = f(\vec{x}) \leftrightarrow \exists z \psi(\vec{x}, z)$, proponemos $\bar{f}(\alpha) = \alpha + 1$, la cual satisface el lema.

ii) $f(\vec{x}) = \{x_i, x_j\}$, $1 \leq i, j \leq n$ es nuevamente una Σ_0-fórmula pues $f(\vec{x}) = z \leftrightarrow (w \in z \to w = x_i \vee x_j)$, es decir $y = f(\vec{x}) \leftrightarrow \exists z \psi(\vec{x}, z, y)$, proponemos $\bar{f}(\alpha) = \alpha + 1$, la cual satisface el lema.

iii) $f(\vec{x}) = x_i - x_j$, $1 \leq n$ es una Σ_0-fórmula pues $f(\vec{x}) = z \leftrightarrow (w \in z \to w \in x_i \notin x_j)$, es decir $y = f(\vec{x}) \leftrightarrow \exists z \psi(\vec{x}, z, y)$, proponemos $\bar{f}(\alpha) = \alpha + 1$, la cual satisface el lema.

iv) $f(\vec{x}) = h(g_i(\vec{x}), \ldots, g_k(\vec{x}))$ es Σ_0 pues

$$f(\bar{x}) = z \leftrightarrow \exists u_1, \ldots u_k \exists u (u_1 = g_i(\bar{x}), \ldots, u_k = g_k(\bar{x}) \wedge u = h(u_1, \ldots, u_k)),$$

y existen funciones ordinales $\bar{h}, \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_k$ que satisfacen el Lema de Estabilidad. Definimos la siguiente sucesión de funciones:

$$f_0 = \bar{g}_1, f_1 = \bar{h}(\bar{g}_1), f_2 = \bar{g}_2(\bar{h}(\bar{g}_1)) \ldots, f_{2k} = \bar{h}(f_{k-1}), f_{k-1} = \bar{h}(f_k), \ldots$$

Sea $\bar{f} = \sup_{k \in \omega} f_k$, Supongamos que $\vec{x} \in L_{\bar{f}(\alpha)}$ elegimos un $n \in \omega$ tal que $\vec{x} \in L_{f_n(\alpha)}$, por lo que $h(g_i(\vec{x}), \ldots, g_k(\vec{x})) \in L_{n+k+1}$.

v) $f(y, \vec{x}) = \cup_{z \in y} g(z, \vec{x})$, es Σ_0 ya que la unión y g son Σ_0, Definimos $f(\alpha) = g(\alpha) + 1$.

vi) $f(\vec{x}) = \omega$ es Σ_0 ya que $f(\vec{x}) = z \leftrightarrow z = \omega$, es decir $y = f(\vec{x}) \leftrightarrow \exists z \psi(\vec{x}, z)$, proponemos $\bar{f}(\alpha) = \alpha + 1$, la cual satisface el lema.

vii) Sea $g(x, v)$ tal que satisface la conclusión del Lema de Estabilidad y sean: $f(y, x) = g(x, < f(z, x) | z \in y >)$, $\varphi_g(z, w, x, v)$ y $\bar{g}$ como en el lema. Sin pérdida de generalidad podemos hacer la siguiente suposición:

$$|x|, |y| < \bar{g}(\alpha) \rightarrow |\langle f(z, x) | z \in y \rangle| < \bar{g}(\alpha). \qquad (***)$$

Esto es posible ya que: $f'(y, x) = \langle f(z, x) | z \in y \rangle$ es p.r., por lo tanto existe a_n tal que $|\langle f(z, x) : z \in y \rangle| < a_n(|y, x|) < \bar{g}(a_n(|y, x|))$. $g \circ a_n$ es también normal y cumple todo lo requerido, ya que $L_{\bar{g}(\alpha)} \subseteq L_{\bar{g} \circ a_n(\alpha)}$. Sea $\psi(h, k, \lambda)$ la fórmula:

$$Fun(h) \wedge \cup \text{dom}(h) \subseteq (h) \wedge \forall y \in \text{dom}(h) \exists z \in k \varphi_g(z, h(y), x, h \upharpoonright y).$$

ψ es una Σ_0-fórmula. Más aún, si $\models \psi(\dot{h}, \dot{v}, \dot{x})$ entonces $h(y) = f(y, x)$ para todo $y \in \text{dom}(h)$, se muestra por $\in$-inducción. Supongamos que si $z \in y$ entonces $h(z) = f(z, x)$.

$$f(y, x) = g(x, \langle f(z, x) | z \in y \rangle) = g(x, \langle h(z) | z \in y \rangle) = g(x, h \upharpoonright y)$$

Como $\psi(h, k, x)$, en particular $\exists z \in k \varphi_g(z, h(y), x, h \upharpoonright y)$ si y sólo si $h(y) = g(x, h \upharpoonright y)$.

Afirmación. Si $|y| < \alpha$; $|x| < \beta$, $y, x \in L_\beta$ y $\delta = \bar{f}(\alpha, \beta)$, entonces existe un $h \in L_\delta$ tal que $y \in \text{dom}(h) \wedge \models \psi(\dot{h}, \dot{L_\delta}, \dot{x})$.

La prueba de esta afirmación es por inducción sobre α:

Si $\alpha = 0$, es trivial.

Supongamos, que la afirmación ocurre para α. Sean $|y| = \alpha + 1$ y $\delta = \bar{f}(\alpha, \beta)$, hagamos $h^* = \cup \{h \in L_\delta | \models \psi(\dot{h}, \dot{L_\delta}, \dot{x})\}$. Entonces $h^* \in L_{\delta+1}$ y $y \subset \text{dom}(h^*)$ ya que si $u \in y$ entonces $|u| < \alpha$ por lo que se cumple la hipótesis de inducción es decir $u \in \text{dom}(h) \subset \text{dom}(h^*)$. Aquí $h^* \upharpoonright y = \langle f(z, x) | z \in y \rangle$ pues $h(y) = f(y, x)$.

Por (***) concluimos que $|h^* \upharpoonright y| < \bar{g}(\delta + 1)$ como $h^* \upharpoonright y \in L_{\bar{g}(\delta+1)}$, por definición de rango, tenemos:

$$f(y, x) = g(x, h^* \upharpoonright y) \in L_{\bar{g}(\delta+1)} \exists z \in L_{\bar{g}(\delta+1)} \models \varphi_g(\dot{z}, \dot{f(y, x)}, h^* \upharpoonright y).$$

Ahora sea $\bar{f}(\alpha)$ la enumeración de los ordinales p.r. cerrados $\bar{f}(\alpha, \beta)$. Obtenemos esto mediante $\bar{f}(\alpha) = \bar{f}(\alpha, \alpha)$ y definimos:

$\bar{f} = 0$

$\bar{f}(\lambda) = \sup_{\nu < \lambda} \bar{f}(\nu)$ para ordinal límite λ

Sea $\varphi_f(v, z, y, x)$ la fórmula $\exists h \in v(\psi(h, v, x) \wedge \langle z, y \rangle \in h)$, por lo que φ_f, $\bar{f}$ tiene las propiedades requeridas.

$\square$

4.5. El lema de condensación

Corolario 83. *(Lema de Condensación). Suponiendo $lim(\alpha)$. Si $X \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$, entonces existe $\beta \leq \alpha$ tal que $\langle X, \in \rangle \cong \langle L_\beta, \in \rangle$.*

Demostración. Sean $X \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$ y $lim(\alpha)$. Entonces $\langle X, \in \rangle$ es extensional: para $x, y \in X$ y $x \neq y$ se tiene, usando la transitividad de L_α, $L_\alpha \models \exists z(z \notin x \leftrightarrow z \in y)$ y como $X \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$, $X \models \exists(z \notin x \leftrightarrow z \in y)$. Esto garantiza que podemos usar el lema del colapso, sea $\pi : \langle X, \in \rangle \cong \langle W, \in \rangle$ donde W es transitivo.

Ahora $\langle L_\nu | \nu \in On \rangle$ es p.r. y L_α es cerrado bajo su propia definición; se tiene que si $\nu \in X$ entonces $L_\nu \in X$; pues si $\nu \in X$, $\nu \in L_\alpha$, por lo que

$L_\alpha \models \exists y(y = L_\nu)$, por lo tanto

$X \models \exists y(y = L_\nu)$.

Por lo que X es cerrado bajo la definición de $\langle L_\nu \upharpoonright \nu \in X \rangle$, pues para $v \in X$ $\pi(L_\nu) = L_{\pi(\nu)}$.

Llamemos $\beta = \pi''(X \cap On)$ (el rango restringido a $X \cap On$), donde π es el colapso de Mostowski, por esta razón β debe ser un ordinal. Acontinuación se mostrará que efectivamente, $W = L_\beta$. Como $X \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$ y $lim(\alpha)$, supongamos que $\beta = \gamma \cup \{\gamma\}$, se observa $\beta \notin W$, pero $W \models On(\gamma)$:

$W \models \exists(On(x) \wedge \forall(y \neq x \cup \{x\}))$ Como W y X son $\in$-isomorfos

$X \models \exists(On(x) \wedge \forall(y \neq x \cup \{x\}))$ pues W y X son $\in$-isomorfos

$X \models \forall(y \neq \gamma \cup \{\gamma\})$

$L_\alpha \models \forall\exists(On(y) \wedge On(z) \wedge z = y \cup \{y\})$

$L_\alpha \models \exists(On(z) \wedge z = \gamma \cup \{\gamma\})$

$X \models \exists z(On(z) \wedge z = \gamma \cup \{\gamma\})$ lo cuál es una contradicción por lo que $lim(\beta)$.

El siguiente paso es mostrar que $W \subseteq L_\beta$. Sea $w \in W$, entonces existe $x \in X$ tal que $\pi(x) = w$, y por su puesto $x \in L_\alpha$, entonces también $L_\alpha \models (\exists\nu)(x \in L_\nu)$ ya que α es un ordinal límite. Debido a que $X \prec_{\Sigma_1} L_\alpha$ y usando el Lema de Estabilidad antes mencionado, se tiene $X \models (\exists x)(x \in L_\nu)$, aquí es necesario el lema de estabilidad, pues L_ν no es modelo de ZF. Existe $\nu \in X$ tal que $x \in L_\nu$, por lo que $\pi(x) \in \pi(\nu) = L_{\pi(\nu)} \subseteq L_\beta$ es decir $\pi(x) = w \in L_\beta$.

Inversamente para ver $L_\beta \subseteq W$, tómese $y \in L_\beta$, entonces para algún $\nu \in X \cap On$ $y \in L_{\pi(\nu)}$, sin embargo por definición de π, $L_{\pi(\nu)}$ es el colapso transitivo de $L_\nu \cap X$. Aquí $y = \pi(x)$ para algún $x \in L_\nu \cap X$. Así $y \in ran(\pi) = W$. En otra palabras $L_\beta \subseteq W$ y la prueba esta completa. □

Demostrando el lema de condensación completamos la prueba de que L satisface la hipótesis generalizada del continuo.

Capítulo 5

La Semimorass

5.1. Definición de la semimorass.

Empecemos, por considerar el lenguaje $\mathcal{L} = \{\dot{A}, ...\}$ donde $\dot{A}$ es un 1-predicado, sea $\mathcal{U} = \langle \mathbb{A}, A, ... \rangle$ se dice que es un (κ, λ)-modelo, si $|\mathbb{A}| = \kappa$ y $|A| = \lambda$.

Para cardinales infinitos α, β, κ y λ se define la noción de Propiedad General de Transferencia:

$$(\alpha, \beta) \to (\kappa, \lambda).$$

Lo que significa que si una teoría T tiene un (α, β)-modelo, entonces también tiene un (κ, λ)-modelo elementalmente equivalente al primero.

El teorema de Löwenhim-Skolem establece que dado un modelo de cardinalidad κ de un lenguaje numerable, se pueden obtener modelos de cardinaidad arbitraria. Además podemos encontrar una versión generalizada del mismo, el cuál dice que para cualesquiera cardinales infinitos $\alpha < \beta$ se tiene:

$$(\beta, \alpha) \to (\alpha^+, \alpha).$$

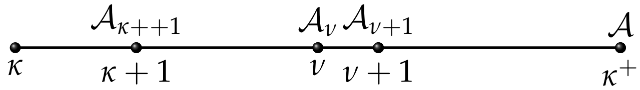
Entonces surge la pregunta natural, ¿ cuándo una teoría T de un lenguaje numerable L, la cuál tiene un (κ, λ), también tiene (κ^+, λ)-modelo elementalmente equivalente? Esto se conoce como la conjuetura "gap-one".

Es decir lo que se busca es aumentar la cardinalidad del universo, sin variar la cardinalidad del predicado. Este problema no lo podemos resolver con una cadena de modelos, pues en esta no podemos tener el control de la cardinalidad del predicado, de cada uno de los modelos involucrados en ésta.

Eliminando la posibilidad de usar una cadena de modelos, entonces el problema es establecer algún tipo de sistema de índices sobre el cuál se pueda construir un sistema de modelos, que resuelva el problema. Dicho marco o sistema de índices la llamaremos una semimorass, o más precisamente una semi$(\kappa^+, 1)-$morass.

A fin de fórmular la noción de semimorass vamos a fijar algún tipo de representación esquemática de lo que requiere.

La finalidad es construir $\mathcal{A}$ una estructura de cardinalidad κ^+, y una cadena creciente de tamaño κ^+, donde $|\mathcal{A}_\nu| = \kappa$ para $\kappa^+ < \nu < \kappa^{++}$.



Además para cada ν entre κ y κ^+, tenemos una cadena de modelos con límite $\mathcal{A}_\nu$. Cada miembro de esta nueva cadena es una estructura de cardinalidad κ. Se puede indexar a las estructuras cuyo límite sea $\mathcal{A}_\nu$ con ordinales menores que κ, así podemos nombrar a estas estructuras $\mathcal{A}_{\nu\tau}$. Es importante notar que no se utilizarán todos los ordinales $\tau < \kappa$, sólo alguna colección asociada con ν mediante una relación bienfundada $\lhd$ sobre κ^+ de manera que $\{\tau | \tau \lhd \nu\}$ está totalmente ordenado por $\lhd$ y $\bar{\tau} \lhd \tau$ impica en cierto sentido $\mathcal{A}_{\nu\tau}$ extiende a $\mathcal{A}_{\nu\bar{\tau}}$. El siguiente paso es determinar la sucesión $(\mathcal{A}_\nu | \omega_1 < \nu < \omega_2)$.

Ahora que se tiene claro como deben ser los modelos $\mathcal{A}_\nu$, $\mathcal{A}_{\nu\tau}$, concentremos en el sistema de índices en los que vamos a definir el sistema de modelos, esto será la semimorass.

Definición 84. Sea ς un conjunto de pares ordenados tal que $\alpha < \nu < \kappa^+$, $\alpha \leq \kappa$ y cada vez que $(\alpha, \nu), (\alpha', \nu') \in \varsigma$, entonces:

$$\alpha < \alpha' \to \nu < \alpha'$$

Intuitivamente esto es para asegurar que nuestros ïntervalos"sean disjuntos.

Se define:

$S^0 = \{\alpha \in \kappa + 1 | \exists \nu [(\alpha, \nu) \in \varsigma]\}$

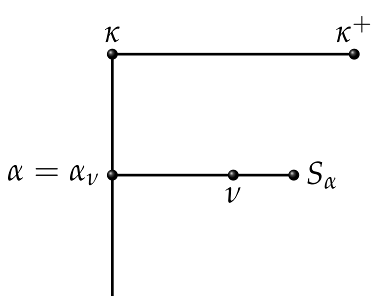
$S^1 = \{\nu \in \kappa + 1 | \exists \alpha [(\alpha, \nu) \in \varsigma]\}$

$S = S^0 \cup S^1$

$S_\alpha = \{\nu \in S^1 | (\alpha, \nu) \in \varsigma\}$ para $\alpha \in S^0$.

$\alpha_\nu =$El único ordinal $\alpha \in S^0$ tal que $(\alpha, \nu) \in \varsigma$ para $\nu \in S^1$

Intuitivamente S_{κ^+} es la κ^+-cadena que estamos tratando de determinar, mientras que cada S_α, con $\alpha < \kappa$ es una κ-aproximación de κ^+.



Sea $\lhd$ un orden sobre S^1 tal que $\lhd$ es un árbol y

$$\nu \lhd \tau \to \alpha_\nu < \alpha_\tau.$$

Sea $(\pi_{\nu\tau}|\nu \lhd \tau)$ un sistema conmutativo de funciones.

$\mathbf{M} = \langle S, \varsigma, \lhd, (\pi_{\nu\tau})\nu \to \tau \rangle$, es una $(k,1)$-semimorass si satisface los siguientes axiomas:

M0 a) S_α es cerrado en $\sup(S_\alpha)$ para toda $\alpha \in S^0$ y si $\alpha < \kappa$, entonces $\sup(S_\alpha) \in S_\alpha$.

b) $\kappa = \text{máx}(S^0) = \sup(S^0 \cap \kappa)$ y $\kappa^+ = \sup(S_\kappa)$.

M1 Si $\nu \lhd \tau$, entonces: $\pi_{\nu\tau} \upharpoonright \alpha_\nu = id \upharpoonright \alpha_\nu$, $\pi_{\nu\tau}(\alpha_\nu) = \alpha_\nu$, $\pi_{\nu\tau}(\nu) = \tau$, $\pi_{\nu\tau}[S_{\alpha_\nu}] \subseteq S_{\alpha_\tau}$ y:

1) Si γ es el menor elemento de S_{α_ν}, entonces $\pi_{\nu\tau}(\gamma)$ es el menor elemento de S_{α_τ}.
2) Si γ sucede inmediatamente a β en $S_{\alpha_\nu} \cap (\nu+1)$, entonces $\pi_{\nu\tau}(\gamma)$ sucede inmediatamente a $\pi_{\nu\tau}(\beta)$ en $S_{\alpha_\tau} \cap (\tau+1)$.
3) Si γ es límite en $S_{\alpha_\nu} \cap (v+1)$, entonces $\pi_{\nu\tau}(\gamma)$ es límite en S_{α_τ}.

(M1) dice que las funciones $\pi_{\nu\tau}$ encajan cada ïntervalo"de la semimorass $S_{\alpha_\nu} \cap (\nu+1)$ dentro de otro intervalo de la semimorass $S_{\alpha_\tau} \cap (\tau+1)$.

M2 Si $\bar{\tau} \lhd \tau$ y $\bar{v} \in S_{\alpha_\tau} \cap \bar{\tau}$ y $\nu = \pi_{\bar{\tau}\tau}(\bar{v})$, entonces $\nu \lhd \bar{v}$ y $\pi_{\bar{v}\nu} \upharpoonright \bar{v} = \pi_{\bar{\tau}\tau}(\bar{v})$

(M2) dice que los encajes $\pi_{\bar{v}\nu}$ se comportan muy bien hacia la derecha para cada renglón S.

M3 $\{\alpha_\nu|\nu \lhd \tau\}$ es cerrado en α_τ para todo $\tau \in S^1$.

(M3) Dice que a medida que avanzamos a lo largo de una rama $\{\nu|\nu \lhd \tau\}$ del árbol de la semimorass todo límite existe en esa rama.

M4 Si τ es máximo en S_α, entonces el conjunto $\{\alpha_\nu|\nu \lhd \tau\}$ es no acotado en α_τ.

(M4) Dice que cualquier punto que no está a la extrema derecha de su nivel es un punto límite del árbol de la semimorass. Esto tiene la sorprendente consecuencia de que si α es un punto sucesor en S^0, entonces S_α tiene un sólo miembro.

M5 Si $\{\alpha_\nu|\nu \lhd \tau\}$ es no acotado en α_τ, entonces

$$\tau = \bigcup_{\nu \lhd \tau} \pi_{\nu\tau}{}''\nu$$

.

5.2. Construcción de una semimorass en L.

Antes de construir una semimorass, probemos algunas propiedades de cada L_κ cuando κ es regular, que serán de gran ayuda posteriormente.

Lema 85. *Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular, entonces L_κ es modelo de ZF^-.*

Demostración. Como L_κ es transitivo, entonces es modelo de extensionalidad y fundación.

Existencia. Como $\kappa > \omega$, entonces $L_0 \in L_\kappa$, es decir $\emptyset \in L_\kappa$.

Par. Sean $a, b \in L_\kappa$ como κ es límite entonces existe $\gamma < \kappa$ tal que $a, b \in L_\gamma$, por lo que $\{a, b\} = \{x \in L_\gamma | x = a \vee x = b\} \in L_{\gamma+1} \subset L_\kappa$.

Unión. Sea $x \in L_\kappa$, debido aque L_κ es transitivo, $y = \cup x \subseteq L_\kappa$, como κ es límite se tiene que $y \subseteq L_\alpha$ para un $\alpha < \kappa$. La fórmula $\phi(v_0) \equiv (v_0) \in v_1 \wedge v_1 \in \dot{x}$ define a y como un subconjunto de L_α (en L_α) por lo que $y \in Def(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subset L_\kappa$.

Infinito. Por definición para $\kappa > \omega$, $\omega \in L_\kappa$.

Remplazo. Supongamos que $L_\kappa \models \forall x \exists y \phi(x, y)$. Debemos verificar

$$L_\kappa \models \forall x \in a \exists y \in b \phi(x, y)$$

Es decir debemos ver que $b \in L_\kappa$. Sea $x \in a$, por hipótesis existe $y \in L_\kappa$ tal que $\phi(x, y)$, recordemos que L y cada estrato se ha bien ordenado, por lo que $\{y | \phi(x, y)\}$ tiene menor elemento, digamos y_x.

Por lo que podemos definir b de la siguiente manera:

$$b = \{y_x | \exists x(\phi(x, y_x) \wedge (\phi(x, y) \to y \leq_L y_x))\}$$

.

Sea $B = \{rg(y_x) | y_x \in b\}$, observemos que $rg(x) < \kappa$, puesto que $x \in L$, entonces $\sup(B) < \kappa$, utilizando también el hecho de que κ es regular, por lo que $B \subseteq \gamma' < \kappa$. Sea $\gamma = \text{máx}\{\gamma', rg(a)\}$ por lo que se tiene:

$$b = \{z \in L_\gamma | \exists x(\phi(x, z) \wedge (\forall y \in L_\gamma(\phi(x, y) \to y \leq_{L_\gamma} y_x)))\}$$

Lo que dice que $b \in L_{\gamma+1}$, y en consecuencia $b \in L_\kappa$

□

Definición 86. **a)** Un conjunto $x \subseteq \kappa$ es cofinal en κ si $\sup(x) = \kappa$.

b) $cf(\kappa) = \text{mín}\{|x| : x \subseteq \kappa \wedge x \text{ es cofinal en } \kappa\}$ es la cofinalidad de κ.

c) κ es regular si $cf(\kappa) = \kappa$

d) κ es singular si $cf(\kappa) < \kappa$

Lema 87. *Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular. Entonces κ es p.r.cerrado y existe una cantidad cofinal de ordinales p.r. cerrado que pertenecen a κ.*

Demostración. Sean f una función y $x \in \kappa$, como L_κ es modelo de ZF^-, es decir en L_κ se cumple el axioma de remplazo, por lo que $f(x) \in L_\kappa$, en particular se cumple para funciones p.r.,lo que quiere decir que L_κ es p.r. cerrado, y por lo tanto κ es p.r. cerrado, pues $L_\kappa \cap On = \kappa$.

Por otro lado, sea $\alpha_0 < \kappa$, definimos α_{i+1} como el menor α tal que la unión de todos los rangos de funciones p.r. recursivas restringidas a L_{α_i} son un subconjunto L_α, Entonces $\sup_{i<\omega} \alpha_i < \kappa$ es p.r. cerrado. □

En analogía con el lema anterior tenemos:

Lema 88. *Sea $\mathcal{U}$ modelo de ZF^-.Entonces existe una cantidad cofinal de ordinales límites p.r. cerrados.*

Demostración. Sea $\eta \in \mathcal{U}$, debido a Löwenheim-Skolem podemos pensar que $\mathcal{U}$ tiene cardinalidad regular. Tomando $x_0 = \cup(\gamma_0 + 1)$, $\langle x_0 \rangle \preceq \mathcal{U}$, pero $\mathcal{U} \models ZF^-$ por lo tanto $\langle x_0 \rangle \models ZF^-$, $On \cap \langle x_0 \rangle = \gamma_1$, y γ_1 es p.r. cerrado, pues sean $\zeta < \gamma_1$ y f p.r., $\zeta \in \langle x_0 \rangle$, por lo que $f(\zeta) \in \langle x_0 \rangle$, es decir $f(\zeta) \in \gamma_1$. Ahora tomamos $x_1 = \cup(\gamma_1 + 1)$, $On \cap \langle x_1 \rangle = \gamma_2$, repitiendo el mismo argumento γ_2 es p.r. cerrado, sea $\gamma = \sup_{n\in\omega} \gamma_n$ es p.r. cerrado, límite y por su puesto mayor que η. □

Estamos listos para construir una semi-morass. Desde ahora consideramos un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ con un predicado unitario $\dot{A}$ y el predicado binario $\dot{\in}$. Se define la teoría $\mathbb{T}$:

$$\mathbb{T} := ZFE^- + V = L + \dot{A} \text{ regular } + \dot{A} \text{ es el cardinal más grande.}$$

Por otro lado, por un (τ, κ)-modelo de $\mathcal{L}$ se entiende un modelo $\mathcal{U} = \langle \mathbb{A}, \dot{A_{\mathcal{U}}}, \dot{\in}_{\mathcal{U}}, ... \rangle$ tal que $|A| = \tau$, y $|\dot{A_{\mathcal{U}}}| = \kappa$. En lo siguiente se trabajará dentro de un modelo $\mathcal{U}$ de $\mathbb{T}$. Sea $A = \dot{A}^{\mathcal{U}}$ la interpretación de $\dot{A}$ en $\mathcal{U}$.

Consideremos el conjunto S_A. Debido a que se ha fijado un modelo $\mathcal{U}$ de $\mathbb{T}$ se piensa que A es regular y es el cardinal más grande; por el lema 87 existen una cantidad cofinal de ordinales límites p.r. cerrados dentro de $\mathcal{U}$.

Sea ς un conjunto de pares ordenados (α, ν) tal que $\alpha < \nu < \alpha^+$, $\alpha < A$ y

$$L_\nu \models (\alpha \text{ es el mayor cardinal } \wedge\ \alpha \text{ es regular}) \wedge\ \forall \epsilon < \nu\ \exists \eta < \nu (\epsilon < \nu \wedge \eta \text{ es p.r. cerrado})$$

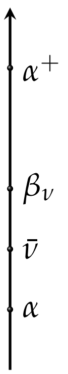
Naturalmente formamos
$S^0 = \{\alpha \in A + 1 | \exists \nu [(\alpha, \nu) \in \varsigma]\}$
$S^1 = \{\nu | \exists \alpha [(\alpha, \nu) \in \varsigma]\}$
$S = S^0 \cup S^1$
$S_\alpha = \{\nu \in S^1 | (\alpha, \nu) \in \varsigma\}$ para $\alpha \in S^0$.
α_ν =El único ordinal $\alpha \in S^0$ tal que $(\alpha, \nu) \in \varsigma$ para $\nu \in S^1$

Observación 89. α_ν está bien definida pues si $(\alpha, \nu) \in \varsigma$ y ocurriera $(\beta, \nu) \in \varsigma$ con $\beta \neq \alpha$ se tendría en particular que $L_\nu \models \alpha$ es el mayor cardinal y $L_\nu \models \beta$ es el mayor cardinal, lo cual es una contradicción.

Definimos la relación $\triangleleft$ como

$$\begin{aligned} \bar{\nu} \triangleleft \nu : \quad \leftrightarrow \quad & \text{Existe } \pi : L_{\beta_{\bar{\nu}}} \prec L_{\beta_\nu} \text{ tal que} \\ & \operatorname{crit}(\pi) = \alpha_{\bar{\nu}} \quad \wedge \quad \alpha_{\bar{\nu}} < \alpha_\nu \quad \wedge \\ & \pi(\bar{\nu}) = \nu \quad \wedge \quad \pi(\alpha_{\bar{\nu}}) = \alpha_\nu \end{aligned}$$

donde $\beta_\nu :=$ El menor $\beta > \nu$ tal que $L_\beta \models |\nu| \leq \alpha$ y β es p.r. cerrado.



β_ν está bien definido para $\nu \in S_\alpha$. Finalmente $\pi_{\bar{\nu}\nu} : L_{\bar{\nu}} \to L_\nu$ con $\pi_{\bar{\nu}\nu} := \pi \restriction L_{\bar{\nu}}$ Se verifica que ς y $\triangleleft$ determinan una Semimorass.

Primero se probará que los encajes $\pi_{\bar{\nu}\nu}$ definidos anteriormente son únicos.

Lema 90. *Los encajes $\pi_{\bar{\nu}\nu}$ definidos anteriormente son únicos.*

Demostración. Se define

$X :=$ El conjunto de todos los $y \in L_{\beta_\nu}$ tales que y es $L_{\beta_\nu}-$definible utilizando parámetros en $\{\nu, \alpha_\nu\} \cup \alpha_\alpha$

$X \prec L_{\beta_\nu}$, pues si $L_{\beta_\nu} \models \exists y \varphi(y, a)$ con $a \in X$, es decir existe un $b \in L_{\beta_\nu}$, tal que $L_{\beta_\nu} \models \varphi(b, a)$, sin embargo b es definible mediante la siguiente fórmula: $\psi(v, w) = \varphi(v, w) \wedge \forall v(z \subseteq_L v \to \neg\varphi(z, y))$.

Entonces por el lema de condensación X es $\in$-isomorfa a un nivel menor o igual que L_{β_ν} de la L_α-jerarquía. Más aún afirmamos:

$$X = L_{\beta_\nu}$$

.

Primero observemos que, por definición de $X \prec L_{\beta_\nu}$, se tiene en L_{β_ν}:

$$(\exists f)(f : \alpha_\nu \overset{\text{sobre}}{\longrightarrow} \nu),$$

como X es subestructura de L_{β_ν}, existe un elemento f de X tal que $f : \alpha_\nu \overset{\text{sobre}}{\longrightarrow} \nu$. Por lo tanto para esta f se tiene $\operatorname{dom}(f) = \alpha_\nu \subseteq X$ y finalmente $\nu = \operatorname{ran}(f) \subseteq X$.

Sea $\gamma : L_{\bar{\gamma}} \leftrightarrow X$ el colapso de X con $\bar{\gamma} \leq \beta$. Se ha mostrado que ν es un subconjunto de X y de esta forma γ restingida a $\nu + 1$ es la identidad. También se tiene que $\bar{\gamma}$ es p.r. cerrado y $L_{\bar{\gamma}} \models |\nu| \leq \alpha_\nu$, por ser mínimo β_ν tal que cumple estas propiedades se tiene que $\bar{\gamma}$ y por nuestra construcción se tiene $X = L_{\beta_\nu}$, lo que prueba la afirmación.

Por la afirmación todo elemento de L_{β_ν} es definible tomando parámetros en $\{\nu, \alpha_\nu\} \cup \alpha_\nu$, sin embargo estos son fijos por $\pi : L_{\beta_\nu} \to L_{\beta_\nu}$, y se tiene π es el único posible, y de esta forma $\pi_{\bar{\nu}\nu} = \pi \restriction L_{\bar{\nu}}$, lo que prueba el lema.

□

Definición 91. Un árbol es un conjunto parcialmente ordenado $\langle T, \leq_T \rangle$ tal que para todo $t \in T$, el conjunto $\hat{t} = \{s \in T | s <_T t\}$ está bien ordenado. Así que podemos considerar a los árboles como una generalización de los naturales.

La altura $Alt(t)$ de t en $(T, \leq_T)$ es el tipo ordinal de $\hat{t}$. El nivel α de T es el conjunto $T_\alpha = \{t \in T : Alt(t) = \alpha\}$. La altura $Alt(T)$ es $\min\{\alpha : T_\alpha = \emptyset\}$.

Lema 92. *$\lhd$ Es un árbol*

Demostración. $\lhd$ es antisimétrica, es decir $\forall a, b \in A \quad a \lhd b$ entonces $b \lhd a$, esto pasa por definición.

$\lhd$ es transitiva, es decir $\forall a, b, c \in A, a \lhd b$ y $b \lhd c \to a \lhd c$:

Supongamos que $\nu_1 \lhd \nu_2$ y $\nu_2 \lhd \nu_3$, por transitividad de los ordinales se tiene primero que $\nu_1 < \nu_3$. Sea $\pi := \pi_2 \circ \pi_1$.

$\pi(\alpha_{\nu_1}) = \pi_2\pi_1(\alpha_{\nu_1}) = \pi_2(\alpha_{\nu_2}) = \alpha_{\nu_3}$

$\pi(\nu_2) = \pi_2 \circ \pi_1(\nu_1) = \pi_2(\nu_2) = \nu_3$, y π es encaje ya que es composición de encajes.

Por otra parte, considerando el conjunto P de predecesores de un elemento p del árbol, entonces $\langle P, \lhd \rangle$, esta bien fundado, pues sea $\hat{p} = \{s \in S : s \lhd p\}$, supongamos que este conjunto no esta bien fundado, es decir existe una cadena infinita:

$$... < s_3 < s_2 < s_1 < s_0$$

Sin embargo si esto ocurriera se tendría la cadena:

$$... < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0$$

Lo cuál es una contradicción.

Para ver que $\hat{p}$ es linealmente ordenado por $\lhd$, se demostrará que si $\bar{\nu} \lhd$ y $\nu' \lhd \nu$, entonces $\bar{\nu} \lhd \nu'$ o $\nu' \lhd \bar{\nu}$.

Sea $\bar{\nu} \lhd \nu$ y $\nu' \lhd \nu$. Considerando los encajes $\pi : L_{\beta_{\bar{\nu}}} \to L_{\beta_\nu}$, $\pi' : L_{\beta_{\nu'}} \to L_{\beta_\nu}$, dada la definición $\pi_{\bar{\nu}\nu} := \pi \restriction L_{\bar{\nu}}$ y $\pi_{\nu'\nu} := \pi' \restriction L_{\nu'}$, entonces tenemos por construcción lo siguiente:

$$rng(\pi) \quad = \quad \text{La menor } \bar{X} \prec L_{\beta_\nu} \text{ tal que } A \cap \bar{X} \text{ es transitivo y } \alpha_{\bar{\nu}} = A \cap \bar{X}$$

$$rng(\pi') \quad = \quad \text{La menor } X' \prec L_{\beta_\nu} \text{ tal que } A \cap X' \text{ es transitivo y } \alpha_{\nu'} = A \cap X'.$$

Sin pérdida de generalidad, sea $\alpha_{\bar{\nu}} \leq \alpha_{\alpha'}$, entonces $\bar{X} \subseteq X'$. De esta forma $\pi'^{-1} \circ \pi : L_{\beta_{\bar{\nu}}} \to L_{\beta_\nu}$ es un encaje elemental con las propiedades necesarias y finalmente tenemos $(\pi'^{-1} \circ \pi) \restriction L_{\bar{\nu}} = \pi_{\bar{\nu}\nu}$, debido a la unicidad de $\pi_{\bar{\nu}\nu}$, por lo que $\bar{\nu} \lhd \nu$.

$\square$

Ahora se verá $(\pi_{\nu\tau} | \nu \lhd \tau)$ es un sistema conmutativo de funciones, es decir se verificará que $\pi_{\tau\gamma} \circ \pi_{\nu\tau} = \pi_{\nu\gamma}$. Se sabe $\nu \lhd \tau$, $\tau \lhd \gamma$, por lo tanto $\nu \lhd \gamma$, lo que asegura que existen $\pi' : L_{\beta\nu} \to L_{\beta\tau}$, $\pi'' : L_{\beta\tau} \to L_{\beta\gamma}$ y $\pi : L_{\beta\nu} \to L_{\beta\gamma}$ que cumplen los requerimientos establecidos y $\pi_{\nu\tau} = \pi' \restriction L_\nu$, $\pi_{\tau\gamma} = \pi'' \restriction L_\tau$, y $\pi_{\nu\gamma} = \pi \restriction L_\nu$. Se observa $\pi_{\nu\gamma} \circ \pi_{\nu\tau} : L_\nu \to L_\tau$.

Sea $x \in \alpha_\nu$, $\pi'' \circ \pi'(x) = \pi''(\pi'(x)) = \pi''(x)$ por definición $\pi''(x) = x$ ya que $\alpha_\nu < \alpha_\tau$, por lo tanto crit$(\pi) = \alpha_\nu$. Claramente $\alpha_\nu < \alpha_\gamma$, y por último $\pi'' \circ \pi'(\nu) = \pi''(\pi'(v)) = \pi''(\tau)$, por lo tanto $\pi_{\tau\gamma} \circ \pi_{\tau\nu} = \pi_{\nu\gamma}$.

Observación 93. Para $\alpha \leq A$, sean $\varepsilon, \nu \in S_\alpha$ donde $\varepsilon < \nu$. entonces $\beta_\varepsilon < \nu$.

Demostración. Sean α, ε y ν como arriba. Entonces por definición, α es el cardinal más grande en L_ν y de esta forma se tiene trivialmente:

$$L_\nu \models |\varepsilon| \leq \alpha.$$

Sin embargo esto pasa para cualquier ordinal $\varepsilon' \in \nu$, que contenga tanto a α como a ε es decir $L_{\varepsilon'} \models |\varepsilon| \leq \alpha$.

Por lo que somos capaces de encontrar para ε un $\eta < \nu$ p.r cerrado pues ν es límite de ordinales p.r cerrados, tal que $L_\eta \models |\varepsilon| \leq \alpha$, y esta es justo la condición que debe satisfcer β_ε y finalmente apelando a la minimalidad de β_ε se tiene $\beta \leq \eta < \nu$. □

Ahora nos cercioraremos de que $\mathcal{M}$ definida con $\lhd$, cumple los seis axiomas de ser una semimorass.

Demostración. M0. **a)** Sea $\nu = \sup(S_\alpha) = \bigcup_{\mu \in S_\alpha} \mu$. Por hipótesis cada $\mu \in S_\alpha$ satisface:

$L_\mu \models \alpha$ (es el cardinal más grande) $\wedge(\alpha$ es regular) $\wedge(\forall \epsilon < \nu \exists \eta < \nu(\epsilon < \nu \wedge \eta)$ es p.r. cerrado).

Supongamos que en L_ν, α no es cardinal, quiere decir:

$L_\nu \models \exists f \exists \beta < \alpha(f$ es una función biyectiva $\wedge f : \alpha \to \beta$, por definición de ν tendríamos, para algún $\mu \in S_\alpha$:

$L_\mu \models \exists f \exists \beta < \alpha(f$ es una función biyectiva $\wedge f : \alpha \to \beta$, para alguna $\mu \in S_\alpha$, lo cuál es una contradicción.

Lo mismo ocurre si suponemos que:

$L_\nu \models \exists \beta(\beta$ es cardinal $\wedge \beta > \alpha$. Otra vez debido a que ν es el supremo se tiene:

$L_\mu \models \exists \beta(\beta$ es cardinal $\wedge \beta > \alpha$, para alguna $\mu \in S_\alpha$, lo cuál es una contradicción.

El mismo razonamiento ocurre para verificar que α es regular en L_ν, supongamos que α es singular, entonces existiría una familia de subconjuntos de α de cardinalidad $\gamma < \alpha$ tal que $\bigcup_{i \in \gamma} A_i = \alpha$ con $|A_i| < \alpha$ para toda $i \in \gamma$, pero nuevamente esta familia por definición de ν, pertenecería a un L_μ con $\mu \in S_\alpha$, lo que lleva a una contradicción.

Para finalizar falta ver que ν es límite de ordinales p.r. cerrados. Sea $\epsilon < \nu$, entonces $\epsilon \in \mu$, para algún $\mu \in S_\alpha$, por lo que existe un $\eta \in \mu$ y por tanto en ν tal que η es p.r. cerrado.

b) Primero probemos que $\sup(S_A)$ es no acotado: Podemos pensar que $\mathcal{U}$ tiene cardinalidad regular, por el teorema de Löwenheim-Skolem, lo que debemos probar es $\forall \gamma \exists \zeta \in S_A$ con $\zeta > \gamma$. Sea $\gamma \in \mathcal{U}$, tomando $x = \cup(\gamma + 1)$, construimos $\langle x \rangle \prec \mathcal{U} \models ZFC^-$, se observa que la cardinalidad de $\langle x \rangle$ es estrictamente menor a la de $\mathcal{U}$ y debido al lema de Mostowski que $\langle x \rangle$ es transitivo $On \cap \langle x \rangle = \zeta$, donde ζ es p.r. cerrado pues si $\zeta' < \zeta$, se sigue que $\zeta' \in \langle x \rangle$, por lo que $f(\zeta') \in \langle x \rangle$ para cualquier función en particular para las primitivo recursivas, además ζ resulta ser un ordinal límite, ya que si fuera sucesor es decir si $\zeta = \eta + 1$, $\eta \in \langle x \rangle \models ZFC^-$ tendriamos que $\eta + 1, \eta + 2 \cdots \in \langle x \rangle$, lo cuál es una contradicción.

Por otro lado como $\langle x \rangle \preceq \mathcal{U}$, se tiene que $\langle x \rangle = (\bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha)$. Si $y \in \langle x \rangle$ entonces $y \in L_\alpha$ con $\alpha \in \langle x \rangle$, por lo que $\alpha < \zeta$, $y \in L_\zeta$. Si $y \in L_\zeta$, entonces $y \in L_{\zeta_0}$ con $\zeta_0 < \zeta$, sin embargo existe $\alpha > \zeta_0$ tal que $\alpha \in \langle x \rangle$, por lo tanto $y \in \langle x \rangle$, concluyendo que $\langle x \rangle = L_\zeta$, por lo que $L_\zeta \models (A$ es el mayor ordinal $\wedge$ A es regular$) \wedge \forall \xi < A \exists \eta < A(\xi < \eta$ es p.r. cerrado$)\}$.

Ahora veámos que $A = \sup(S^0 \cap A)$, para esto basta demostrar que $\{\alpha < A | S_\alpha \neq \emptyset\}$ es estacionario en A: ya que S_A es no vacío en particular, S_A es no vacío por lo que se puede fijar un $\nu \in S_A$ arbitrario. Se definen simultaneamente dos sucesiones $\langle \alpha_\xi | \xi < A \rangle$ y $\langle X_\xi | \xi < A \rangle$:

$\alpha_\xi := X_\xi \cap A$

$X_0 :=$ la menor $X \prec L_{\beta_\nu}$ donde $X \cap A$ es transitivo ,

$X_{\xi+1} :=$ la menor $X \prec L_{\beta_\nu}$ donde $X_\xi \cap A$ es transitivo y $\alpha_\xi \in X, \nu \in X, A \in X$

$X_\lambda := \bigcup\{X_\chi | \chi < \lambda\}$ para ordinales límite λ.

Aquí, por ”el menor submodelo (elemental)"se entiende que es un submodelo mínimo respecto a la relación inclusión. Directamente de la definición se tiene $\alpha_\lambda = \sup_{\xi<\lambda} \alpha_\xi$.

Ahora para cada $\xi \leq A$ sea $\pi : L_{\beta(\epsilon)} \leftrightarrow X_\epsilon$ el colapso de Mostowski. Por constucción $\pi(\alpha_\chi) = A$. Más aún, π es un encaje elemental de $L_{\beta(\xi)}$ dentro de L_{β_ν} pues $\pi : L_{\beta(\xi)} \leftrightarrow X_\xi \preceq L_{\beta_\nu}$. Sea $\nu(\xi) \in L_{\beta(\xi)}$ tal que $\pi(\nu(\xi)) = \nu$ entonces sucede $\nu(\epsilon) \in S_{\alpha_\xi}$, pues:

$L_{\beta_\nu} \models (L_{\pi(\nu(\xi))}) \models \pi(\alpha_\xi)$ es el cardinal más grande , por lo que

$X_{\xi+1} \models (L_{(\nu(\xi))}) \models \alpha_\xi$ es el cardinal más grande .

Hasta aquí se ha mostrado $\{\alpha_\xi | \chi < A\} \subseteq \{\alpha < A | S_\alpha \neq \emptyset\}$, lo que sigue es verificar que $\{\alpha_\xi | \xi < A\}$ es un club.

i.) Es no acotado: Por inducción se prueba $\gamma < \alpha_\gamma$. Si $\gamma = \emptyset$, $\alpha_0 = X_0 \cap A \geq \emptyset$. Supongamos que $\gamma < \alpha_\gamma$, y como $\alpha_\gamma \in X_{\gamma+1}$, pues $\gamma \in X_{\gamma+1}$, se cumple $\gamma + 1 \in \alpha_{\gamma+1}$. Ahora, si γ es límite $\alpha_\gamma = sup_{\chi<\gamma} \alpha_\chi > \sup_{\chi<\gamma} \chi$.

ii) Es cerrado se sigue de $\alpha_\gamma = \sup_{\chi<\gamma} \alpha_\chi$

M1. Si $\nu \lhd \tau$, entonces: $\pi_{\nu\tau} \restriction \alpha_\nu = id \restriction \alpha_\nu$, $\pi_{\nu\tau}(\alpha_\nu) = \alpha_\nu$, $\pi_{\nu\tau}(\nu) = \tau$, $\pi_{\nu\tau}[S_{\alpha_\nu}] \subseteq S_{\alpha_\tau}$ por definición.

a) Se nombra:

$\phi_1(x) \equiv x$ es el mayor cardinal.

$\phi_2(x) \equiv x$ es regular

$\phi_3 \equiv \forall \xi < \nu \exists \eta < \nu(\xi < \eta \wedge \eta$ es p.r. cerrado$)$

$\phi(x) \equiv \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$

a) Sean γ es el menor elemento de S_{α_ν}, y $\nu > \gamma$, entonces:
$L_\nu \models \phi^{L_\gamma}(\alpha_\nu) \wedge \forall\zeta < \gamma \neg\phi^{L_\zeta}(\alpha_\nu)$
Como $\pi(\nu) = \tau$ se tiene:
$L_\tau \models \phi^{L_{\pi(\gamma)}}(\alpha_\tau) \wedge \pi(\gamma)\neg\phi^{L_\zeta}(\alpha_\tau)$.

b) Sea $\gamma < \nu$, tal que $L_\gamma \models \phi^{L_\beta}(x) \wedge \forall\eta \in \mathrm{On}(\beta > \eta)$ por lo que:
$L_\gamma \models \phi^{L_{\pi\beta}}(x) \wedge \forall\eta \in \mathrm{On}(\pi\beta > \eta)$.

c) Sea $\gamma < \nu$, tal que $L_\nu \models L_\gamma = \cup_{\beta<\gamma} L_\beta \wedge \forall(\beta < \gamma(\phi^{L_\beta}))$. Por lo tanto se tiene:
$L_{\pi(\nu)} \models L_\gamma = \cup_{\beta<\pi(\gamma)} L_\beta \wedge \forall(\beta < \pi(\gamma)(\phi^{L_\beta}))$

M2. Proponemos $\pi^* = \pi \upharpoonright L_{\beta_\nu}$.

Como $\nu = \pi_{\bar\tau\tau}(\nu) = \pi \upharpoonright \tau(\nu)$, por lo que $\pi^*(\bar\nu) = \nu$, y $\mathrm{crit}(\pi^*) = \alpha_{\bar\tau} = \alpha_{\bar\nu}$.

Ahora veamos que $\pi^* : L_{\beta_{\bar\nu}} \prec L_{\beta_\nu}$, esto se debe a que $\pi : L_{\beta_{\bar\tau}} \prec L_{\beta_\tau}$ y que $\pi(\bar\nu) = \nu$; utilizando la observación 2 se tiene $\beta_{\bar\nu} < \beta_{\bar\tau}$, y $\beta_\nu < \beta_\tau$, y sea

$$\begin{aligned}\phi(x, \alpha_{\bar\nu}, \bar\nu) \equiv L_{\bar\nu} \models \alpha_{\bar\nu} &\text{ es el mayor cardinal } \wedge \alpha_{\bar\nu} \text{ es regular}\\ &\wedge\xi < \bar\nu \exists\eta < \bar\nu(\xi < \eta \wedge \eta) \text{ p.r. cerrado}\end{aligned}$$

Entonces:

$L_{\beta_{\bar\tau}} \models \phi(x, \alpha_{\bar\nu}, \bar\nu)$

$L_{\beta_\tau} \models \phi(x, \alpha_\nu, \nu)$

Por lo tanto $\pi^* = L_{\beta_{\bar\nu}} \prec L_{\beta_\nu}$. Solo falta ver que $\pi_{\bar\nu\nu} = \pi \upharpoonright \nu$: $\pi_{\bar\tau\tau} \upharpoonright \bar\nu = (\pi \upharpoonright L_{\bar\tau}) \upharpoonright L_{\bar\nu}$, pero $L_{\bar\nu} \subseteq L_{\bar\tau}$, $\pi_{\bar\tau\tau} \upharpoonright \bar\nu = \pi \upharpoonright \nu = \pi_{\bar\nu\nu}$.

M3. Sean $\tau \in S_\alpha$ y $\bar\alpha < \alpha_\tau$ un ordinal límite tal que el conjunto $\{\alpha_\nu | \nu \lhd \tau \wedge \alpha_\nu < \bar\alpha\}$ es acotado en $\bar\alpha$. Tenemos que mostrar que hay un $\nu \lhd \tau$ tal que $\alpha_\nu = \bar\alpha$. Para esto formamos la siguiente sucesión: $\{L_{\nu_i}\}_{\nu_i \lhd \tau}$. Tomamos $\cup_{\nu_i \lhd \tau} L_{\nu_i}$ la cuál es igual a L_γ para algún $\gamma \leq \tau$, y $\sup\{\nu_i | \nu_i \lhd \tau\} = \nu$. Puesto que para cada ν se tiene:

$L_{\nu_i} \models \alpha_i$ es el cardinal más grande y α_i regular, es decir se tiene:

$L_{\nu_i} \models \exists x(x$ es el cardinal más grande y x es regular).

Entonces, debido a que L_γ es superestuctura elemental de cada $L_{\beta_{\nu_i}}$ se sabe: $L_\nu \models \exists x(x$ es el cardinal más grande y x es regular). Llamémosle α al cardinal más grande con α regular en L_ν, además $\alpha > \alpha_{\nu_i}$ para toda α_{ν_i}. Observemos que $\gamma = \beta_\nu$, pues γ es p.r., ya que es la unión de p.r., $L_\nu \models \alpha$ es el cardinal más grande con α regular, y apelando al hecho de que cada $L_{\nu_i} \models |\nu_i| \leq \alpha_i$, en cada L_{ν_i} tenemos una función f_{ν_i} biyectiva de ν_i a α_i, definimos para $x \in \nu$ de la siguiente manera $f(x) = f_{\nu_i}(x)$, si $x \in \nu_i$ y si $x \in \nu_j$ entonces $\nu_j > \nu_i$, la cuál es biyectiva y por lo tanto $L_\gamma \models |\nu| \leq \alpha$.

Falta cercioranos de que $\nu \lhd \tau$. Como $\nu_i \lhd \tau$, entonces existe un encaje elemental $\pi_i : L_{\beta_{\nu_i}} \to L_{\beta_\tau}$. Definimos $\pi : L_{\beta_\nu} \to L_{\beta_\tau}$ de la siguiente manera $\pi(x) = \pi_i(x)$ si $x \in L_{\beta\nu_i}$, esta función está bien definida, pues $\pi_{i_{\nu_i\tau}} = \pi_i \restriction L_{\nu_i}$ y $(\pi_{i_{\nu_i\tau}} | \nu_i \lhd \tau)$ forma un sistema conmutativo de funciones. Ahora veamos que π es un encaje de L_{β_ν} a L_{β_τ}. Supongamos:

$L_{\beta_\tau} \models \exists y \phi(y, a)$ con $a \in L_{\beta_\nu}$, entonces $a \in L_{\beta_{\nu_i}}$ para algúna $\nu_i \lhd \tau$, por lo tanto:

$L_{\beta_{\nu_i}} \models \exists y \phi(y, a)$, lo que quiere decir que:

$L_{\beta_\nu} \models \exists y \phi(y, a)$ con $a \in L_{\beta_\nu}$.

Por construcción $\mathrm{crit}(\pi) = \alpha_\nu$, y como cada $\alpha_{i_\nu} < \alpha_\tau$, tenemos que $\alpha_\nu \leq \alpha_\tau$, si $\alpha_\nu = \alpha_\tau$ entonces, existiria algún ν_0, tal que $\alpha_{\nu_0} = \alpha_\tau$, lo cuál es una contradicción, por lo que α_ν es estrictamente menor que α_τ. Como π es un encaje elemental se sabe que $\pi(\cup_{\nu_i \lhd \tau} \alpha_{\nu_i}) = \cup_{\nu_i \lhd \tau}(\pi(\alpha_{\nu_i})) = \alpha_\tau$, análogamente para verificar $\pi(\nu) = \tau$.

M4. Basta probar que para $\alpha \leq A$, $\varepsilon, \nu \in S_\alpha$ donde $\varepsilon < \nu$, entonces $\sup\{\bar{\varepsilon} | \bar{\varepsilon} \lhd \varepsilon\} = \alpha$. Supongamos que $\bar{\varepsilon} \lhd \varepsilon$; el modelo L_ε piensa que $\alpha = \alpha_\varepsilon$ es el cardinal más grande y $L_{\bar{\varepsilon}}$ piensa lo mismo con $\alpha_{\bar{\varepsilon}} < \alpha$ ya que estan relacionados. Por lo tanto, $\bar{\varepsilon}$, no puede ser mayor que α ya que $L_{\bar{\epsilon}}$ es un subconjunto de L_ε.

Por otro lado, trabajando en L_ν, sea $\gamma < \alpha$. Debemos encontrar $\bar{\epsilon} < \alpha$ tal que $\gamma \leq \bar{\varepsilon}$ y $\bar{\varepsilon} \lhd \varepsilon$.

Trabajando en L_ν, formamos la siguiente sucesión:

$X_0 := \gamma \cup \{\varepsilon\}$

$X_{i+1} =$La menor $X' \prec L_{\beta_\varepsilon}$ tal que $\cup(X_i \cap \alpha) \subseteq X$ y $X_0 \cap \alpha \in X'$

$X := \cup_{i<\omega} X_i$

Entonces X es la menor $X \prec L_{\beta_\varepsilon}$ tal que $\gamma \cup \{\varepsilon\} \subseteq X$ y $X \cap \alpha$ es transitivo.

Sin embargo, α se ve como un cardinal regular en L_ν, ya que $\nu \in S_\alpha$, por lo tanto la cardinalidad de X es estrictamente menor que α en este modelo.

Considerando el colapso $\sigma : L_{\bar{\beta}} \leftrightarrow X$ y sabiendo $\sigma(\bar{\alpha}) = \alpha$ para el punto critico $\bar{\alpha}$ del encaje σ. La función colapso σ es un elemento de L_ν debido a que el colapso es p.r y ν es límite de ordinales p.r. cerrados.

Sea $\bar{\varepsilon}$ tal que $\sigma(\bar{\varepsilon}) = \varepsilon$, entonces se afirma que $\bar{\varepsilon} \in S_{\bar{\alpha}}$.

Para probar esto debemos recurrir a las propiedades de la definición de $S_{\bar{\alpha}}$. Como α es estrictamente menor que ε ya que $\varepsilon \in S_\alpha$, se tiene que $\bar{\alpha} < \bar{\varepsilon}$. Como ε es límite de ordinales cerrado, p.r., también lo es $\bar{\varepsilon}$, de igual manera como $L_\varepsilon \models \alpha$ es el cardinal más grande y α es regular, ya que σ es elemental se tiene $L_{\sigma(\varepsilon)} \models \sigma(\alpha)$ es el cardinal más grande y α es regular.

Si $\bar{\varepsilon} < \bar{\beta}$, entonces $\bar{\varepsilon}$ es estrictamente menor que α, lo que prueba la afirmación.

Por construcción tenemos que $\gamma \leq \bar{\varepsilon} < \alpha$, y para el encaje elemental $\sigma : L_{\bar{\beta}} \to L_{\bar{\beta}_\varepsilon}$ se tiene que $\bar{\beta} = \beta_{\bar{\varepsilon}}$ y $\bar{\alpha} = \beta_{\alpha\varepsilon}$, entonces por la unicidad de los encajes elementales se tiene que $\sigma \restriction L_{\bar{\varepsilon}} = \pi_{\bar{\epsilon}\epsilon}$, por lo que $\bar{\varepsilon} \lhd \varepsilon$.

M5. Es suficiente probar que si $\{\alpha_\nu | \nu \lhd \tau\}$ es no acotado en α_τ, entonces

$$L_\tau = \bigcup_{\nu \lhd \tau} \pi_{\nu\tau}{}'' L_\nu$$

.

Debido a que $\{\alpha_\nu | \nu \lhd \tau\}$ es no acotado en τ, τ es un ordinal límite. Sea $x \in L_\tau$, entonces $x \in L_\eta$ para algún $\eta \in \tau$. Por otro lado como $L_\tau \models$ (α_τ es el cardinal más grande) y $\eta < \tau$ existe una función sobre $f : \alpha_\tau \to L_\eta$, por lo que $x = f(\xi)$, para un $\xi \in \alpha_\tau$, como $\{\alpha_\nu | \nu \lhd \tau\}$ es no acotado en τ, existe un ν tal que $\xi \in \nu$. Por hipótesis $\pi_{\nu\tau}(x) = x$ lo que muestra $L_\tau \subseteq \cup_{\nu \lhd \tau} \pi_{\nu\tau}{}'' L_\nu$.

Para la otra contención probaremos que $\pi_{\nu\tau}{}'' L_\nu \subseteq L_\tau$ para $\nu \lhd \tau$. Sea $\nu \lhd \tau$, observemos que $L_\nu \subseteq L_\eta$ para algún $\eta \lhd \tau$ ya que $\{\alpha_\nu | \nu \lhd \tau\}$ es no acotado, y como $\lhd$ es un árbol, se tiene que $\nu \lhd \eta$, $\nu < \alpha_\eta$, por lo que

$$\pi_{\nu\tau}{}'' \subseteq L_\eta.$$

$\square$

Definición 94. Sea A un cardinal, la sucesión $\langle S_\alpha | \alpha \leq A \rangle$, la relación $\lhd$ con la sucesión $\langle \pi_{\bar{\nu}\nu} | \bar{\nu} \lhd \nu \rangle$ de encajes definidos anteriormente. Entonces llamamos a la estructura:
$\mathfrak{M} := \langle B, A, \langle S_\alpha | \alpha \leq A \rangle, \lhd, \langle \pi_{\bar{\nu}\nu} | \bar{\nu} \lhd \nu \rangle \rangle$
la semi A-morass con el universo B tal que $A \subseteq B \subseteq$On.

5.3. El principio $\diamondsuit$.

Ahora es el turno de una aplicación. Estrechamente relacionado con el concepto de conjunto estacionario aparece el principio combinatorio $\diamondsuit$ debido a Jensen.

En esta sección se demostrará que la semimorass implica el axioma del diamante $\diamondsuit$, aunque realmente se probará algo más fuerte, que la semimorass implica el principio $\diamondsuit^\sharp$, otro principio combinatorio que generaliza el principio $\diamondsuit$; para poder enteder $\diamondsuit^\sharp$, necesitamos hablar un poco de lenguajes de orden superior.

En general los lenguajes de orden superior tienen variables del tipo finito (u orden); la idea es que si D es el universo de una estructura, las variables de tipo 1, son las variables usuales variables de primer orden, las variable de tipo 2 son cuantificables sobre $Pot(D)$, y en general, las variables de tipo $i+1$ son cuantificables sobre $Pot^i(D)$ donde Pot^i denota i-iteraciones de la operacion potencia de un conjunto. Una fórmula es Π^m_n si y sólo si comienza con un bloque de cuantificadores universales de variables de orden $m+1$, seguido de un bloque de cuantificadores existenciales de variables de orden $m+1$, y así sucesivamente con a lo más n bloques en total, seguido de una fórmula que contiene variables de orden $m+1$, y variables cuantificadas de orden a lo más m.

En analogía con las fórmulas Π_n^m tenemos las fórmulas Σ_n^m sin embargo estas empiezan con un bloque de cuantificadores existenciales.

Regresemos al principio $\diamondsuit$, tal como fue formulado por Jensen, $\diamondsuit$ afirma la existencia de una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $S_\alpha \subseteq \alpha$ y siempre que $X \subseteq \omega_1$, existe un conjunto estacionario E tal que:

$$\alpha \in E \to X \cap \alpha = S_\alpha$$

Podemos generalizar este principio a cualquier cardinal κ, es decir el principio $\diamondsuit_\kappa$ afirma la existencia de una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ tal que $S_\alpha \subseteq \alpha$ y siempre que $X \subseteq \kappa$, existe un conjunto estacionario E tal que:

$$\alpha \in E \to X \cap \alpha = S_\alpha$$

Se probará que la semimorass implica el principio $\diamondsuit_\kappa$, pero como ya se dijo se hará de una forma indirecta, se mostrará que la semimorass implica un principio combinatorio más general que el principio $\diamondsuit_\kappa$. Definamos antes algunos otros principios combinatorios.

$\diamondsuit'_\kappa$ Existe una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ tal que $S_\alpha \subseteq P(\alpha)$ y $|S_\alpha| \leq |\alpha| + \aleph_0$ para cada $\alpha < \kappa$, y siempre $X \subseteq \kappa$ entonces $\{\alpha \in \kappa | X \cap \alpha \in S_\alpha\}$ es estacionario.

$\diamondsuit^+_\kappa$ Existe una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ tal que $S_\alpha \subseteq P(\alpha)$ y $|S_\alpha| <\leq |\alpha| + \aleph_0$ para cada $\alpha < \kappa$, y siempre $X \subseteq \kappa$ entonces existe un club $C \subseteq \kappa$ tal que $\forall \alpha \in C$ se tiene $X \cap \alpha, B \cap \alpha \in S_\alpha$.

$\diamondsuit^\sharp_\kappa$ Existe una sucesión $\langle N_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ tal que:

i) $|N_\alpha| \leq |\alpha| + \aleph_0$ tiene cardinalidad κ, N_α transitivo, p.r. cerrado y contiene a α.

ii) Si $X \subseteq \kappa$ existe un club $C \subseteq \kappa$, tal que si $\alpha \in C \to X \cap \alpha, C \cap \alpha \in N_\alpha$.

iii) $\langle N_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ es Π_n^1-reflejante para $n \in \kappa$, esto es, siempre que ϕ es un Π_n^1-enunciado verdadero en una estructura $\langle \kappa, \in, (A_i)_{i \in \kappa} \rangle$ entonces existe un $\alpha < \kappa^+$ tal que:

$$N_\alpha \models \phi \text{ es verdadero en } \langle \alpha, \in, (A \upharpoonright \alpha)_{i \in \omega} \rangle.$$

Observación 95. $\diamondsuit^\sharp_\kappa \to \diamondsuit^+_\kappa$, pues la sucesión $\diamondsuit^\sharp_\kappa$ también es una sucesión $\diamondsuit^+_\kappa$.

Observación 96. $\diamondsuit^+_\kappa \to \diamondsuit'_\kappa$, Supongamos que $\langle S_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ es una sucesión $\diamondsuit^+_\kappa$, entonces $S_\alpha \subseteq |\alpha| + \aleph_0$ para cada $\aleph_0$; sólo falta mostrar que $\{\alpha \in \kappa | X \cap \alpha \in S_\alpha\} = W$ es estacionario. Sea D un club; como W es una sucesión $\diamondsuit^+_\kappa$, existe un club C, tal que si $\alpha \in C$, entonces $X \cup \alpha \in S_\alpha$. Ya que D y C son clubes entonces $C \cap D \neq \emptyset$, por lo que sea $\alpha \in D \cap C$. Se sigue que $X \cap \alpha \in S_\alpha$, es decir $\alpha \in W$, de donde se sigue que $W \cap D \neq \emptyset$, esto es, W es estacionario.

Lema 97. *Si $\lambda < cf(\kappa)$ y $\cup\{X_\nu : \nu < \lambda\}$ es estacionario en κ, existe $\nu < \lambda$ tal que X_ν es estacionario en κ.*

Demostración. Si no fuese cierta la afirmación, entonces para cada ν existe un club C_ν con $C_\nu \cap X_\nu = \emptyset$. Pero entonces $\cap_{\nu<\lambda} C_\nu \cap (\cup_{\nu<\lambda} X_\nu) = \emptyset$; como la intersección de menos que $cf(\kappa)$ clubes es un club, es una contradicción al hecho de que $\cup_{\nu<\lambda} X_\nu$ es estacionario. □

Definición 98. Si λ es un ordinal límite y $0 \notin A \subseteq \lambda$, una función $f : A \to \lambda$ es regresiva si $(\forall \alpha \in A)(f(\alpha) < \alpha)$.

Teorema 99. *Fodor. Sea κ un cardinal no numerable regular y $0 \notin E \subseteq \kappa$ estacionario en κ. Si $f : E \to \kappa$ es regresiva, entonces para algún $\beta \in \kappa$, $\{\alpha \in E | f(\alpha) = \beta\}$ es estacionario en κ.*

Demostración. E es la unión diagonal de los $A_\alpha = \{\beta \in E : f(\beta) = \alpha\}$. Ya que E es estacionario, algunos de los conjuntos A_α es estacionario. □

Lema 100. *(Jensen) $\diamondsuit_{\kappa^+}$ y $\diamondsuit'_{\kappa^+}$ son equivalentes.*

Demostración. a)$\diamondsuit_{\kappa^+} \to \diamondsuit'_{\kappa^+}$: Sea $\langle S_\alpha | \alpha < \kappa^+ \rangle$ que satisface $\diamondsuit_{\kappa^+}$, entonces $\langle \{S_\alpha\} | \alpha < \kappa^+ \rangle$ satisface $\diamondsuit'_{\kappa^+}$; como $S_\alpha \subseteq \alpha$ se tiene $\{S_\alpha\} \subseteq P(\alpha)$, claramente $|\{S_\alpha\}| < \aleph_0$ y por último si $X \subseteq \kappa^+$ entonces $\{\alpha \in \kappa^+ | X \cap \alpha \in \{S_\alpha\}\}$ es estacionario.

b) Recíprocamente supongamos $\diamondsuit'_{\kappa^+}$, es decir suponemos que existe una sucesión $\langle S_\alpha | \alpha < \kappa^+ \rangle$ que cumple sus propiedades. Empecemos por construir una $\diamondsuit'_{\kappa^+}$-sucesión en $\kappa \times \kappa$. Esto es definir una sucesión $\langle T_\alpha | \alpha < \kappa^+ \rangle$ tal que T_α es un subconjunto de $Pot(\alpha \times \kappa)$ con cardinalidad menor que $|\alpha| + \aleph_0$ y para cada conjunto $X \subseteq \kappa^+ \times \kappa^+$, el conjunto

$$\{\alpha \in \kappa^+ | X \cap (\alpha \times \kappa) \in T_\alpha\}$$

es estacionario en κ^+.

Para este fin, escogemos una biyección

$$j : \kappa^+ \leftrightarrow \kappa^+ \times \kappa$$

para todo $\alpha < \kappa^+$ límite se tiene:

$(j \restriction \alpha) : \alpha \leftrightarrow \alpha \times \kappa$.

Para esto usamos el hecho de que cuálquier ordinal $\gamma > 0$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\gamma = \kappa \cdot \beta + \rho.$$

Con $\rho < \kappa$ y único.

para cada $\gamma \in \kappa^+$ podemos poner

$$j(\gamma) = (\beta, \rho)$$

Para cada $\alpha < \kappa^+$, definimos

$$T_\alpha = \begin{cases} \{j''\gamma | \gamma \in S_\alpha\} & \text{si lím}(\alpha), \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\langle T_\alpha | \alpha < \kappa^+ \rangle$ tiene las propiedades deseadas pues cada T_α es un subconjunto de $Pot(\alpha \times \kappa)$ de cardinalidad menor que $|\alpha| + \aleph_0$. Sea $X \subseteq \kappa^+ \times \kappa^+$, el conjunto $\{\alpha \in \kappa^+ | X \cap (\alpha \times \kappa) \in T_\alpha\}$ es estacionario en κ^+.

Sea $\langle T_\alpha(n) | n < \kappa \rangle$, una enumeración para T_α y cada $\alpha < \kappa$.

Afirmación 1. Para cada $X \subseteq (\kappa^+)^2$ existe un $n(X)$ tal que $\{\alpha \in \kappa^+ | X \cap \alpha^2 = T_\alpha(n(X))\}$ es estacionario.

Sea $X \subseteq (\kappa^+)^2$. Pongamos $E = \{\alpha \in \kappa^+ | \alpha\}$ un subconjunto estacionario de κ^+. Se define $f : E \to \omega$ por $f(\alpha) =$ el menor n tal que $X \cap \alpha^2 = T_n(n)$, por lo que $f : E \to \omega$ es regresiva y podemos aplicar el teorema de Fodor, el cuál nos garantiza la existencia de un entero n y un conjunto estacionario $H \subseteq E$ tal que $\alpha \in H \to f(\alpha) = n$. Entonces n confirma la afirmación.

Afirmación 2. Existe un $n < \kappa$ tal que para toda $X \subseteq \kappa^+$ existe $Y \subseteq (\kappa^+)^2$ tal que $X = Y''\{n\}$ y $\{\alpha \in \kappa^+ | Y \cap \alpha^2 = T_\alpha(n)\}$ es estacionario.

Supongamos que no. Para cada $n < \kappa$ existe $X_n \subseteq \kappa$ tal que siempre $Y \subseteq (\kappa^+)^2$, $X_n = Y''\{n\} \to [Y \cap \alpha^2 = T_\alpha = T_\alpha(n)$ es no estacionario. Definimos $Y \subseteq \kappa^2$ por $Y''\{n\} = X_n$ para cada $n < \kappa$. Entonces para toda $n < \kappa$, se tiene $\{\alpha \in \kappa^+ | Y \cap \alpha^2 = T_\alpha(n)\}$ es no estacionario, contradiciendo la afirmación 1, por lo que la afirmación 2 está probada.

Con las 2 afirmaciones ahora el lema es fácil de probar. Tomando a n como en la afirmación 2, para cada $\alpha < \kappa^+$, pongamos $S_\alpha = T_\alpha(n)''\{n\}$. Entonces $S_\alpha \subseteq \alpha$, si $X \subseteq \kappa^+$, $\{\alpha \in \kappa^+ | X \cap \alpha = S_\alpha\}$ es estacionario por (por afirmación 2). Por lo tanto $\langle S_\alpha | \alpha < \omega_1 \rangle$ satisface $\diamondsuit$. Esto prueba que $\diamondsuit' \to \diamondsuit$.

□

Corolario 101. $\diamondsuit^\sharp_{\kappa^+} \to \diamondsuit_{\kappa^+}$

Sea $\tilde{S}$ la clase de todos los ordinales tales que $\gamma \in \tilde{S}$ si L_γ es modelo de ZF$^-$, y S^+ la clase de los puntos límites de $\tilde{S}$. A partir de este momento denotamos por:

$A_\nu = \{\alpha_{\bar{\nu}} | \bar{\nu} \lhd \nu\}$ para $\nu \in S^1$ $B_\nu = \{\bar{\nu} | \bar{\nu} \lhd \nu\}$ para $\nu \in S^1$.

Lema 102. *Sea $\nu \in S^1$, $\nu < \tau$, $\tau \in S^0 \cup S' \to A_\nu, B_\nu \in L_\tau$.*

Demostración. Como $\nu \in S^1$, existe un α que en particular cumple $L_\nu \models$ (α es el cardinal más grande); ya que $\nu < \tau$, sabemos que $\alpha < \tau$ y, más aún, por definición de $\lhd$ se tiene que $\alpha_{\bar{\nu}} < \nu$ para toda $\bar{\nu} \lhd \nu$, por lo que $A_\nu \subset \nu$, por corolario 46, se tiene que $A_\nu \in L_{\nu+1}$, y como $\nu + 1 \leq \tau$ deducimos que $A_\nu \in L_\tau$.

Ahora supongamos que $\tau \in S^1$, entonces existe α con $L_\tau \models$ (α es el cardinal más grande). Como $\nu < \tau$, por definición de $\lhd$ se tiene $\alpha_{\bar{\nu}} < \alpha_\nu$, es decir $A_\nu \subseteq \nu$, y otra vez por el corolario 46 tenemos que $A_\nu \in L_{\nu+1}$, y como $\nu < \tau$, entonces $\nu + 1 \leq \tau$. Por consiguiente, $A_\nu \in L_\tau$.

En forma análoga se prueba $B_\nu \in L_\tau$. □

Ahora mostraremos que hay una $\diamondsuit^{\sharp}_{\kappa^+}$-sucesión contenida en la semimorass.

Sea $\alpha < \kappa^+$. Pongamos $\delta(\alpha) = \text{máx}(S_\alpha \cup \{\alpha+1\})$ si α no es un punto límite en α, y $\delta(\alpha) = \text{mín}(S^0 - (\alpha+1))$ en otro caso.

Por el lema anterior si $\nu \in S_\alpha$ entonces $A_\nu \in N_\nu$.

Definimos $N_\alpha = L_{\delta(\alpha)}$ comprobemos que $\delta(\alpha) \in S^0 \cup S^1$. Supongamos que $\delta(\alpha) = \text{máx}(S_\alpha \cup \{\alpha+1\})$ entonces $\delta(\alpha) = \alpha+1 \in S^1$. Si $\delta(\alpha) = \gamma$ y $\gamma \in S_\alpha$, entonces $(\alpha,\gamma) \in S^1$. Por lo tanto, $\gamma \in S^0$.

Ahora supongamos que $\delta(\alpha) = \text{mín}(S^0 - (\alpha+1))$, entonces $\delta(\alpha) \in S^0$.

Lema 103. $\langle L_{\delta(\alpha)} | \alpha < \kappa^+ \rangle$ *satisface* $\diamondsuit^{\sharp}$.

Demostración. Tenemos que verificar (i)-(iii) en la definición $\diamondsuit^{\sharp}$.

i) Es obvio pues $L_{\delta(\alpha)}$ es de cardinalidad menor que $\alpha + \aleph_0$ pues $|L_{\delta(\alpha)}| = |\delta(\alpha)|$. $L_{\delta(\alpha)}$ es transitivo dado que la jerarquía construible lo es, y por último como $\alpha < \delta(\alpha)$, se tiene $\alpha \in L_{\delta(\alpha)}$.

ii) Sea $\nu \in S_{\kappa^+}$ tal que $X \subseteq L_\nu$, entonces por corolario 46 $x \in \nu^+$, y por axioma de la semimorass existe una $\bar{\nu}$ tal que $X \in$rang $\pi_{\bar{\nu}\nu}$. Entonces $A_\nu - \alpha_{\bar{\nu}}$ es un club, puesto que A_ν es un club. Supongamos que $\alpha \in (A_\nu - \alpha_{\bar{\nu}})$. Como $\pi_{\bar{\nu}\nu}(y) = X$, entonces $y \subseteq \alpha$. Veamos que $X \cap \alpha = y$: sea $x \in X \cap \alpha$, entonces existe un $z \in y$ tal que $\pi(z) = x$, pero por definición de la semimorass ($\text{crit}(\pi) = \alpha_{\nu_0}$) $z = x$. Para la otra contención tomemos $x \in y$, nuevamente $\pi_{\bar{\nu}\nu}$ es la identidad por lo que $x \in X \cap \alpha$. Por lo tanto, $X \cap \alpha = y \in L_{\Delta(\alpha)}$. $A_\nu - \alpha_{\bar{\nu}} \in L_{\delta(\alpha)}$ por el lema 34.

iii) Por último veamos que $\langle L_{\delta(\alpha)} | \alpha < \omega_1 \rangle$ es Π^1_n-reflejante. Sea $\mathcal{U} = \langle \kappa^+, \in, (A_i)_{i<\omega} \rangle$ dada y sea un Π^1_n-enunciado el cuál es verdadero en $\mathcal{U}$. Como S_{κ^+} es un club en κ^{++} existe algún $\nu \in S_{\kappa^+}$ tal que:

$$L_\nu \models (\phi \text{ es verdadero en } \mathcal{U})$$

Escogemos $\bar{\nu} \lhd \nu$ tal que $\mathcal{U} \in$rang $\pi_{\bar{\nu}\nu}$ y $\bar{\nu}$ es un sucesor en $\lhd$. Como $\pi_{\bar{\nu}\nu} : L_{\bar{\nu}} \to L_\nu$, tenemos:

$$L_{\bar{\nu}} \models \phi \text{ es verdadero en } \mathcal{U} \restriction \alpha_{\bar{\nu}}$$

Pero $\bar{\nu}$ es sucesor en $\lhd$. Aqui $\bar{\nu} = \text{máx}\, S_{\alpha_{\bar{\nu}}}$ y también $L_{\delta(\alpha_{\bar{\nu}})} = L_\nu$.

□

Debemos notar que en la prueba se utilizó fuertemente la contrucción de la semimorass, y no sólo sus propiedades intrínsecas.

Definición 104. Sea κ un cardinal.

1. κ es inaccesible débil si $\kappa > \aleph_0$, κ es regular y límite.

2. κ es (fuertemente) inaccesible si $\kappa > \aleph_0$ es regular y límite fuerte es decir, si $\lambda < \kappa$, entonces $2^\lambda < \kappa$.

Corolario 105. *ZF $\nvdash$(Inaccesible débil)*

Supongamos que si, es decir $ZF \vdash \exists\kappa($ tal que κ es inaccesible débil $)$; sabemos que $ZF \vdash \exists z(z = L_\kappa)$; como κ es regular, por resultados anteriores sabemos que L_κ es modelo de ZF^-; sin embargo, L_κ tambiés es modelo del axioma Potencia, pues si $x \in L_\kappa$, como κ es límite, se tiene que $x \in L_\lambda$ con $\lambda < \kappa$, por el corolario 46, tenemos que $Pot(x) \in L_{\lambda^{++}}$, y $\lambda^{++} < \kappa$, así $Pot(x) \in L_\kappa$. Esto es una contradicción con el segundo teorema de incompletude de Gödel pues ZF estaría probando su propia consistencia.

En breve un $\mathcal{L}_{\lambda\mu}$ lenguaje es formulado como sigue. Procediendo como en el lenguaje de primer orden, primero se especifican los símbolos no lógicos: predicados (finitos), funciones y constantes. Este lenguaje permite γ variables donde $\gamma = \text{máx}(\{\lambda, \mu\})$. La regla usual para establecer conjunciones es generalizada para conjunciones $\bigwedge_{\xi<\alpha}$ y disyunciones $\bigvee_{\xi<\alpha}$ de α fórmulas para $\alpha < \lambda$ y cuantificadores universales $\forall_{\xi<\beta}$ y cuantificadores existenciales $\exists_{\xi<\beta}$ de β variables para cualquier $\beta < \mu$. Finalmente, una fórmula es una expresión generada con menos que μ variables libres. Las estructuras que interpretan el lenguje se definen como en el caso de lenguajes de primer orden y la relación de satisfacción es la de lenguajes de primer orden extendida para incorporar los nuevos conectivos infinitos y cuantificadores.

Una collección de $\mathcal{L}_{\lambda\mu}$ enunciados es satisfacible si y sólo si tiene un modelo que interprete las conjunciones, disyunciones y cuantificaciones infinitas; y es ν-satisfacible si y sólo si todas las subcolecciones de cardinalidad menor que ν es satisfacible. Para $\kappa < \omega$.

Definición 106. κ es débilmente compacto si y sólo si para toda colección de $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$- enunciados usando a lo más κ símbolos no lógicos, se tiene que si es κ-satisfacible, entonces es satisfacible.

Lema 107. *Si κ es compacto débil, entonces κ es inaccesible.*

Demostración. Para mostrar que κ es regular, se supone que no, es decir existe $X \subseteq \kappa$ es no acotado, y $|X| < \kappa$. Entonces podemos agregar símbolos de constantes c_α para cada $\alpha < \kappa$, más una constante c distinta a todas c y definir:

$$\Phi = \{c \neq c_\alpha | \alpha < \kappa\} \cup \{ \bigvee_{\beta \in X} \bigvee_{\alpha<\beta} c = c_\alpha\}$$

Sea Φ_0 un subconjunto propio de Φ, con $|\Phi_0| < \kappa$. Φ_0 es satisfacible pues tenemos $|\Phi_0| < |\{c \neq c_\alpha | \alpha < \kappa\}|$ y débido a que X es no acotado siempre podemos encontrar un $c_\alpha \notin \{c \neq c_\alpha | \alpha < \kappa\}$ tal que $c_\alpha = c$. Así, Φ es κ-satisfacible, y como κ es compacto débil se tiene que Φ es satisfacible lo cúal es una contradicción, pues claramente Φ no puede ser satisfacible.

Para verificar que κ es límite fuerte, supongamos lo contrario, es decir que existe un $\lambda < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\lambda$. Entonces podemos añadir al lenguaje tres tipos de constantes c_α y d^i_α para $\alpha < \lambda$ y $i < 2$, u conformar el conjunto de enunciados

$$\Psi = \{ \bigwedge_{\alpha<\lambda} [(c_\alpha = d_\alpha^0 \vee c_\alpha = d_\alpha^0) \wedge d_\alpha^0 \neq d_\alpha^1]\} \bigcup \{ \bigvee_{\alpha<\lambda} (c_\alpha \neq d_\alpha^{f(\alpha)}) | f \in^\lambda 2\}.$$

que es no satisfacible, pues toda interpretación de $\langle c_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ corresponde a una función $g : \lambda \to 2$ definida de la siguiente manera:

$$g(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } c_\alpha = d_\alpha^0 \\ 1 & \text{si } c_\alpha = d_\alpha^1 \end{cases}$$

Sin embargo Ψ es κ-satisfacible, pues sea $\Psi_0 \subseteq \Psi$ y $|\Psi_0| < \kappa < 2^\lambda$; sin pérdida de generalidad supongamos que $\{\bigwedge_{\alpha<\lambda}[(c_\alpha = d_\alpha^0 \vee c_\alpha = d_\alpha^0) \wedge d_\alpha^0 \neq d_\alpha^1]\} \subseteq \Psi_0$. Como $|\Psi_0| < \kappa$, existe un $\psi \in \{\bigvee_{\alpha<\lambda}(c_\alpha \neq d_\alpha^{f(\alpha)} | f \in^\lambda 2)\}$ tal que $\psi \notin \Psi_0$, por lo que ψ define una función $f^* : \lambda \to 2$, y ésta le asigna una interpretación a $\langle c_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ como sigue: $c_\alpha = d_\alpha^0$ si $f^*(\alpha) = 0$ y $c_\alpha = d_\alpha^1$ si $f^*(\alpha) = 1$, mostrando así que es Ψ_0 es satisfacible, de donde se sigue que Ψ es κ-satisfacible, lo que junto con la hipótesis de que κ es compacto débil da lugara auna contradicción.

□

Teorema 108. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para $\kappa > \omega$:*

a) *κ es compacto débil.*

b) *κ es inaccesible y tiene la propiedad árbol.*

c) *$\kappa \to (\kappa)^n_\lambda$ para todo $n < \omega$ y $\lambda < \kappa$*

d) *$\kappa \to (\kappa)^2_2$*

Demostración. Veáse [Kan03]. □

Definición 109. Para una clase X de ordinales, una sucesión $\langle A_\alpha | \alpha \in X \rangle$, tal que $A_\alpha \subseteq \alpha$ para toda $\alpha \in X$, es coherente si para todo $\alpha, \beta \in X$, con $\alpha < \beta$, se cumple $A_\alpha = A_\beta \cap \alpha$.

Inefabilidad es un propiedad de gran cardinal que fortalece compacidad débil. Decimos que κ es inefable si es un cardinal no numerable y regular, y siempre que $f : [\kappa]^2 \to 2$, existe un conjunto estacionario $X \subseteq \kappa$ tal que $|f''[X]^2| = 1$. Donde

$$[x]^\gamma = \{y \subseteq x | y \text{ es del tipo ordinal } \gamma\}$$

De esta definición y por el teorema 108, se sigue que todo cardinal inefable es débil compacto. El recíproco no necesariamente es cierto.

Teorema 110. *Sea $\kappa > \omega$ regular, entonces κ es inefable si y sólo si para toda sucesión $\langle A_\alpha | \alpha < \kappa \rangle$ tal que $A_\alpha \subseteq \alpha$, existe un subconjunto estacionario X de κ tal que la subsucesión $\langle A_\alpha | \alpha \in X \rangle$ es coherente.*

Demostración. Sea $(A_\alpha|\alpha < \kappa)$ dada con $A_\alpha \subseteq \alpha$ para toda $\alpha < \kappa$. Para cada $\alpha < \kappa$, sea $f_\alpha : \alpha \to 2$ la función característica de A_α. Si podemos encontrar una función $f : \kappa \to 2$ tal que:

$$\{\alpha \in \kappa | f \upharpoonright \alpha = f_\alpha\},$$

entonces tomamos a A como $f^{-1}\{1\}$, y habríamos terminado. Con este fin sea $\bowtie$ el orden lexicográfico sobre el cojunto $\{f_\alpha|\alpha < \kappa\}$. Definimos $h : [\kappa]^2 \to 2$ por:

$$h(\{\alpha, \beta\}) = 0 \text{ si y sólo} f_\alpha \bowtie f_\beta (\alpha < \beta < \kappa)$$

Por hipótesis existe un conjunto estacionario $X \subseteq \kappa$ tal que $|h''[X]| = 1$. Supongamos que $h''[X]^2 = \{0\}$ (el otro caso es similar). Así $\alpha, \beta \in X$ y $\alpha < \beta$ implica $f_\alpha \bowtie f_\beta$. Para cada $\nu < \kappa$, sea α_ν el menor elemento de X tal que $\alpha_\nu \geq \nu$ y

$$(\forall \beta \in X)(\beta \geq \alpha_\nu \to f_\beta \upharpoonright \nu = f_{\alpha_\nu} \upharpoonright \nu)$$

Por la elección de X esto siempre es posible. Sea

$$C = \{\gamma \in \kappa | (\forall \nu)(\nu < \gamma \to \alpha_\nu < \gamma)\},$$

por lo que el conjunto

$$Y = X \cap C \cap \{\nu \in \kappa | \nu \text{ es límite}\}$$

es estacionario en κ. Ahora si ν es límite se tiene $\sup_{\eta<\nu} \alpha_\eta < \alpha_\nu$. Además si $\nu \in Y$ tenemos $\alpha_\nu = \nu$, por lo que $\alpha \in Y$ implica $(\forall \beta \in Y)(\beta \geq \alpha \to f_\beta \upharpoonright \alpha = f_\alpha)$. Definimos $f : \kappa \to 2$ por

$$f : \bigcup_{\alpha \in X} f_\alpha.$$

Como $Y \subseteq \{\alpha \in \kappa | f \upharpoonright \alpha = f_\alpha\}$ se obtiene lo que se quería.

Para la otra implicación sea $f : [\kappa]^2 \to 2$ dada. Para $\alpha < \kappa$, definimos $f_\alpha : \alpha \to 2$ por

$$f_\alpha(\nu) = f(\{\nu, \alpha\}) \quad (\nu < \alpha).$$

Por hipótesis de inducción existe una función $\bar{f} : \kappa$ tal que $X = \{\alpha \in \kappa | f_\alpha = \bar{f} \upharpoonright \alpha\}$ es estacionario en κ (consideramos los conjuntos $A_\alpha \subseteq \alpha$ para la cuál f_α es la función característica). Como $\bar{f}$ es regresiva sobre X, por el teorema de Fodor existe un conjunto estacionario $Y \subseteq X$ y un entero $i \in 2$ tal que $\alpha \in Y \to \bar{f}(\alpha) = i$. Para $\nu, \alpha \in Y$, $\nu < \alpha$, tenemos

$$f(\{\nu, \alpha\}) = f_\alpha(\nu) = (\bar{f} \upharpoonright \alpha)(\nu) = \bar{\nu} = i$$

Por lo tanto $|f''[Y]|^2 = 1$.

$\square$

Lema 111. *Si $\kappa = \lambda^+$, $\Diamond_\kappa$ implica que $2^\lambda = \lambda^+$.*

Demostración. Sea $\{W_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ una $\diamondsuit_\kappa$-sucesión. Para todo $X \subseteq \lambda$ existe un conjunto estacionario E de κ tal que si $\alpha \in E$ entonces $X \cap \alpha = W_\alpha$, por lo tanto existe un $\alpha > \lambda$ tal que $X \cap \alpha = W = \alpha$, pero en ese caso $X = X \cap \alpha$; sin embargo esto ocurre para cada subconjunto de λ. Así, la cardinalidad de $Pot(\lambda) = 2^\lambda$ es menor o igual que $\kappa = \lambda^+$. La otra contención simpre es cierta. □

Hemos demostrado que si $\lambda = \kappa^+$, entonces la existencia de una $(\lambda, 1)$-semimorass implica $\diamondsuit_\lambda$. Por lo anterior, ningún cardinal sucesor puede ser inefable. Adicionalmente contamos con los siguientes resultados.

Teorema 112. *Si $\diamondsuit^\sharp_\kappa$, entonces existe un κ-árbol Kurepa el cuál no es κ-subárbol Aronszajn.*

Demostración. Veáse [Dev82]. □

Teorema 113. *Si κ es inefable, no existe un κ-árbol Kurepa.*

Demostración. Veáse [Dev82]. □

Supongamos que κ es un cardinal inefable y $\diamondsuit^\sharp_\kappa$ es válido, pues debido al teorema 114, como κ es inefable, no existe un κ-árbol Kurepa, pero usando el teorma 113 y que $\diamondsuit^\sharp_\kappa$ existe un κ-árbol kurepa, lo cuál es una contradicción.

Por lo tanto, decir que $\langle L_{\delta(\alpha)} | \alpha < \kappa^+ \rangle$ satisface $\diamondsuit^\sharp_{\kappa^+}$ y en consecuencia $\diamondsuit_{\kappa^+}$, no produce contradicciones.

5.4. Comentarios finales

Hemos construido una semimorass en L sin recurrir a la teoría de estructura fina. Este aparato nos permitió demostrar que en L existe una sucesión $\diamondsuit^\sharp$. En este punto es importante preguntarnos sobre la independencia de la existencia de la semimoras con ZFE.

Definamos es enunciado (para κ regular):

$$\mathrm{ES}(\kappa) \equiv \text{ Existe una } (\kappa, 1) - \textit{semimorass}.$$

Primero supongamos que κ es sucesor, digamos $\kappa = \mu^+$. Entonces $ES(\kappa$ implica $2^\kappa = \kappa^+$ y es conocido que existen modelos de ZFE que no satisfacen esta afirmación, por lo que

$$Con(ZFE) \Rightarrow Con(ZFE + \neg ES(\kappa)).$$

Dado que en en L se cumple $ES(\kappa)$, podemos decir que

$$Con(ZFE) \Rightarrow Con(ZFE + ES(\kappa),$$

lo que da lugar a la independencia de $ES(\kappa$ de ZFE, en el caso κ sucesor.

Si κ es límite, se sigue cumpliendo

$$Con(ZFE) \Rightarrow Con(ZFE + ES(\kappa)),$$

Por otro lado, en este caso κ es inaccesible débil, y en la tesis [Ra00] se construye un modelo $\mathfrak{A}$ de ZFE que satisface

$$\mathfrak{A} \models (\kappa^+, \kappa) \not\rightarrow (\lambda^+, \lambda).$$

En [Vill06] se demuestra que

$$ES(\kappa) \Rightarrow (\lambda^+, \lambda) \rightarrow (\kappa^+, \kappa),$$

de donde se deduce que la estructura $\mathfrak{A}$ recién mencionada no puede ser modelo de $ES(\kappa)$. Esto comprueba la independencia de $ES(\kappa)$ de ZFE también en el caso κ límite.

Bibliografía

[Chang65] C. C. Chang, A note on the two-cardinal problem, Proc. Am. Math. Soc. **16**(1965), 1148–1155.

[CK93] C. C. Chang, H. J. Keisler, Model Theory, 3rd. Ed., North-Holland, 1993.

[Dev84] K. Devlin, Constructibility, *Springer-Verlag*, 1984.

[Dev73] K. J. Devlin, Aspects of constructibility. Lecture Notes in Math., Vol. 354, *Springer-Verlag*, New York, 1973.

[Dev82] K. Devlin, The combinatorial principle $\Diamond^\sharp$, J. Symb. Logic 47(1982), 888-899.

[Don81] H. D. Donder, Coarse Morasses in L, Lect. Notes in Math. Vol. **872**, Springer-Verlag (1981), 37–54.

[Hod93] W. Hodges, Model Theory, Cambridge Univ. Press, 1993.

[JenKar] R. B. Jensen, C. Karp, *Primitive Recursive Set Functions*. In Axiomatic Set Theory: Proc. Symp. Pure Math. (Ed. D. Scott), Amer. Math. Soc. **13**(1971), 143–167.

[Jen72] R. B. Jensen, *The fine structure of the constructible hierarchy*, Ann. Math. Logic **4**(1972), 229–308.

[Kan03] A. Kanamori, The Higher Infinite. Second Edition, *Springer*, New York, 2003.

[Mi72] W. Mitchell, Aronszajn trees and the Independence of the transfer property, Ann. Math. Logic 5(1972), 21-46.

[Ra00] T. Räsch, On the Equi-consistency of the Failure of the GAP-1 Transfer Property and an Inaccesible Cardinal, Dissertation, Universität Potsdam, 2000.

[Sil71] J. Silver, The independence of Kurepa's conjecture and the two-cardinal conjectures in model theory, *Axiomatic St Theory*, D. Scott ed., Proc. Symp. Pure Math. 13(1)(1971), 383-390.

[St87] L. Stanley, Review: Keith J. Devlin, Constructibility, J. Symbolic Logic 52,Issue 3 (1987), 864-867.

[Vill06] L. M. Villegas-Silva, *A gap-1 transfer theorem*, Math. Log. Quarterly **52** No. 4 (2006), 340-350.